Rovnice se separovanými proměnnými

1. Nalezněte maximální řešení rovnice $y' = y$ procházející bodem $(0,1)$.

2. Pro diferenciální rovnici $yy' + xy^2 = x$ nalezněte
(a) všechna maximální řešení, (b) maximální řešení procházející bodem $(1,0)$.

3. Pro diferenciální rovnici $y' = \frac{y^2}{x^2}$ nalezněte
(a) všechna maximální řešení, (b) maximální řešení procházející bodem $(1, \frac{1}{2})$,
(c) všechna maximální řešení, která jsou na svém definičním oboru omezená.

4. Pro diferenciální rovnici $y' = -\frac{(1+y^2)x}{1+x^2}$ nalezněte
(a) všechna maximální řešení, (b) maximální řešení procházející bodem $(0,1)$.

5. Nalezněte řešení rovnice $y' = \sqrt[5]{y^2}$, které splňuje $y(-2) = -\frac{3}{5}$ a $y(0) = 1$.

6. Nalezněte všechna maximální řešení rovnice $y' = \frac{\cos x}{e^y}$. Určete množinu všech bodů v $\mathbb{R}^2$, kterými prochází právě jedno řešení definované na celém $\mathbb{R}$.

7. Řešte rovnici $y'(2-e^x) = -3e^x \tan y \cos^2 y$. Pro která A existuje řešení s vlastností
$$\lim_{x\to+\infty} y(x) - \lim_{x\to-\infty} y(x) = A?$$

Najděte všechna maximální řešení následujících rovnic

8. $yy' = \frac{1-2x}{y}$ **9.** $xy' + y = y^2$ **10.** $y' = 10^{x+y}$ **11.** $e^{-y}(1+y') = 1$

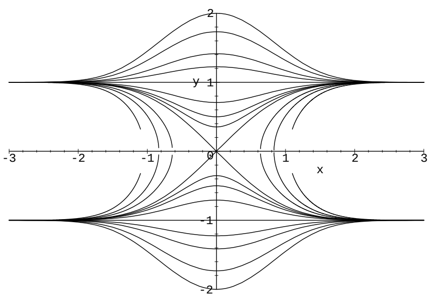
12. $y' + \sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}} = 0$, $x \in (-1,1)$ (*na zbylých intervalech) **13.** $y' \sin x = y \ln y$, $y(\frac{\pi}{2}) = 1$

14. $y' = \frac{1+y^2}{1+x^2}$, $y(0) = 1$ **15.** $y - xy' = b(1 + x^2 y')$, $y(1) = 1$ $(b \in \mathbb{R})$

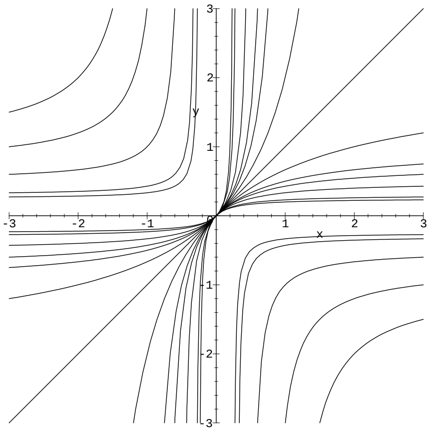
Výsledky a návody. **1.** $y(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$. **2.** (a) singulární řešení $y_0^1 = 1$ na $\mathbb{R}$, $y_0^2 = -1$ na $\mathbb{R}$; $y_1^1(x) = \operatorname{sgn} x \cdot \sqrt{1-e^{-x^2}}$ na $\mathbb{R}$, $y_1^2(x) = -\operatorname{sgn} x \cdot \sqrt{1-e^{-x^2}}$ na $\mathbb{R}$; $y_c^1(x) = \sqrt{1-ce^{-x^2}}$, $x \in (\sqrt{\log c}, +\infty)$, $y_c^2(x) = -\sqrt{1-ce^{-x^2}}$, $x \in (\sqrt{\log c}, +\infty)$, $y_c^3(x) = \sqrt{1-ce^{-x^2}}$, $x \in (-\infty, -\sqrt{\log c})$, $y_c^4(x) = -\sqrt{1-ce^{-x^2}}$, $x \in (-\infty, -\sqrt{\log c})$ pro $c > 1$; $y_c^1(x) = \sqrt{1-ce^{-x^2}}$ na $\mathbb{R}$ a $y_c^2(x) = -\sqrt{1-ce^{-x^2}}$ na $\mathbb{R}$ pro $c<0$ a $c \in (0,1)$. (b) Takové řešení neexistuje. **3.** (a) $y_0^1 = 0$ na $(0,+\infty)$, $y_0^1 = 0$ na $(-\infty, 0)$; další řešení dána vzorečkem $y_c^j(x) = \frac{x}{1-cx}$, $c \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, $j = 1,2,3$ definována na intervalech: pro $c>0$ y_c^1 na $(-\infty,0)$, y_c^2 na $(0,\frac{1}{c})$, y_c^3 na $(\frac{1}{c},+\infty)$; pro $c<0$ y_c^1 na $(-\infty,\frac{1}{c})$, y_c^2 na $(\frac{1}{c},0)$, y_c^3 na $(0,+\infty)$. (b) $y_{-1}^3(x) = \frac{x}{1+x}$, $x \in (0,\infty)$. (c) Omezená jsou y_0^1, y_0^2, y_c^1 pro $c>0$, y_c^3 pro $c<0$. **4.** (a) $y_c^1(x) = \operatorname{tg}(c - \frac{1}{2}\log(1+x^2))$, $x \in (\sqrt{\exp(-\pi+2c)-1}, \sqrt{\exp(\pi+2c)-1})$, $y_c^2(x) = \operatorname{tg}(c - \frac{1}{2}\log(1+x^2))$, $x \in (-\sqrt{\exp(\pi+2c)-1}, -\sqrt{\exp(-\pi+2c)-1})$ pro $c \geq \frac{\pi}{2}$; $y_c(x) = \operatorname{tg}(c - \frac{1}{2}\log(1+x^2))$, $x \in (-\sqrt{\exp(\pi+2c)-1}, \sqrt{\exp(\pi+2c)-1})$ pro $c \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. (b) $y_{\frac{\pi}{4}}(x) = \operatorname{tg}(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\log(1+x^2))$, $x \in (-\sqrt{\exp(\frac{3}{2}\pi)-1}, \sqrt{\exp(\frac{3}{2}\pi)-1})$. **5.** Takové řešení neexistuje. Všechna maximální řešení jsou: $y_s = 0$ na $\mathbb{R}$; $y_{s,c} = \begin{cases} 0 & x \in (-\infty, c] \\ (\frac{3}{5}(x-c))^{\frac{5}{3}} & x \in (c,+\infty) \end{cases}$ pro $c \in \mathbb{R}$; $y_{c,s} = \begin{cases} 0 & x \in (c,+\infty] \\ (\frac{3}{5}(x-c))^{\frac{5}{3}} & x \in (-\infty, c) \end{cases}$ pro $c \in \mathbb{R}$;
$$y_{c,d} = \begin{cases} (\frac{3}{5}(x-c))^{\frac{5}{3}} & x \in (-\infty, c) \\ 0 & x \in [c,d] \\ (\frac{3}{5}(x-d))^{\frac{5}{3}} & x \in (d,+\infty) \end{cases} \quad \text{pro } c,d \in \mathbb{R},\ c \leq d.$$
6. $y_c = \log(\sin x + c)$, $x \in \mathbb{R}$, pro $c > 1$; $y_c^k = \log(\sin x + c)$, $x \in (2k\pi - \arcsin c, (2k+1)\pi + \arcsin c)$, $k \in \mathbb{Z}$, pro $c \in (-1,1]$; $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > \log(\sin x + 1) \text{ nebo } \sin x = -1\}$. **7.** $y_{a,b,k}(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg}(a(e^x-2)^3) + k\pi & x \in [\log 2, +\infty) \\ \operatorname{arctg}(b(e^x-2)^3) + k\pi & x \in (-\infty, \log 2) \end{cases}$ pro $a,b \in \mathbb{R}$ a $k \in \mathbb{Z}$. Hledanou množinou je interval $(-\pi,\pi)$. **8.** $y_c = \sqrt[3]{3(x-x^2+c)}$, $x \in \mathbb{R}$, pro $c < -\frac{1}{4}$; $y_{-1/4}^{1,2} = -\sqrt[3]{3} \cdot (x-\frac{1}{2})^{\frac{2}{3}}$, $x \in (-\infty, \frac{1}{2})$; nebo $x \in (\frac{1}{2}, \infty)$; $y_c^{1,2,3} = \sqrt[3]{3(x-x^2+c)}$, $x \in (-\infty, \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1+4c})$, nebo $x \in (\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1+4c}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1+4c})$, nebo $x \in (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1+4c}, \infty)$, pro $c > -\frac{1}{4}$. **9.** $y_0 = 1$, $x \in \mathbb{R}$; $y_\infty = 0$, $x \in \mathbb{R}$; $y_c^{1,2} = \frac{1}{1-cx}$, $x \in (-\infty, \frac{1}{c})$ nebo $x \in (\frac{1}{c}, \infty)$, pro $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. **10.** $y_c = -\log_{10}(c - 10^x)$, $x \in (-\infty, \log_{10} c)$, pro $c > 0$. **11.** $y_\infty = 0$, $x \in \mathbb{R}$; $y_c^1 = -\log(1+e^{x-c})$, $x \in \mathbb{R}$, pro $c \in \mathbb{R}$; $y_c^2 = -\log(1-e^{x-c})$, $x \in (-\infty, -c)$, pro $c \in \mathbb{R}$. **12.**

$y_{-\frac{3}{2}\pi} = -1$, $x \in (-1,1)$; $y_{\frac{\pi}{2}} = 1$, $x \in (-1,1)$; $y_c = \begin{cases} x \cdot \sin c + \sqrt{1-x^2} \cdot \cos c & x \in (-1, -\sin c) \\ -1 & x \in [-\sin c, 1) \end{cases}$ pro $c \in (-\frac{3}{2}\pi, -\frac{\pi}{2})$; $y_c = \begin{cases} x \cdot \sin c + \sqrt{1-x^2} \cdot \cos c & x \in (\sin c, 1) \\ 1 & x \in [-1, \sin c) \end{cases}$, pro $c \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, $y_{-\frac{\pi}{2}} = -x$, $x \in (-1,1)$. **13.** $y_0 = 1$, $x \in \mathbb{R}$; $y_c^k = e^{c \operatorname{tg} \frac{x}{2}}$, $x \in ((2k-1)\pi, (2k+1)\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$, pro $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Řešení rovnice s počáteční podmínkou je y_0. **14.** $y_0 = x$, $x \in \mathbb{R}$; $y_\infty^{1,2} = -\frac{1}{x}$, $x \in (-\infty, 0)$ nebo $x \in (0, \infty)$; $y_c^{1,2} = \frac{x+c}{1-cx}$, $x \in (-\infty, \frac{1}{c})$ nebo $x \in (\frac{1}{c}, \infty)$. Řešení rovnice s počáteční podmínkou je y_1^1. **15.** Pro $b = 0$: $y_c = cx$, $x \in \mathbb{R}$, pro $c \in \mathbb{R}$. Řešení rovnice s počáteční podmínkou je y_1. Pro $b \neq 0$: $y_0 = b$, $x \in \mathbb{R}$; $y_c^{1,2} = b + \frac{cx}{1+bx}$, $x \in (-\infty, -\frac{1}{b})$ nebo $x \in (-\frac{1}{b}, \infty)$. Řešení rovnice s počáteční podmínkou je y_0, pokud $b = 1$; neexistuje, pokud $b = -1$; $y^1_{\frac{1-b}{1+b}}$, pokud $b < -1$; $y^2_{\frac{1-b}{1+b}}$, pokud $b \in (-1,1) \cup (1, \infty)$.

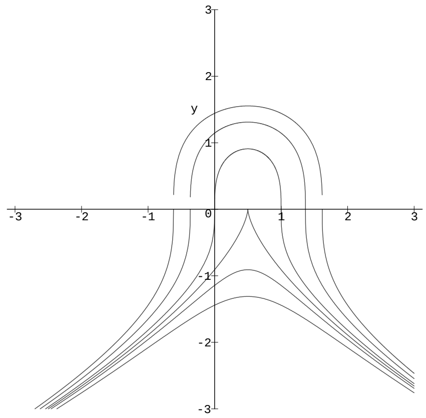
2.



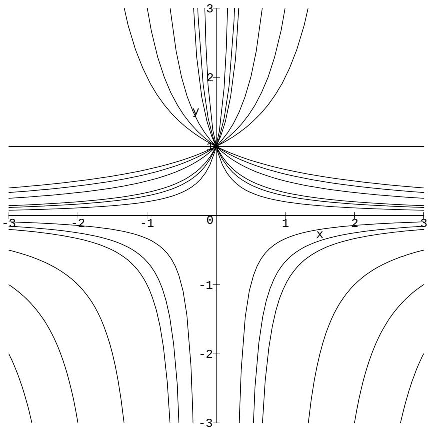
3.



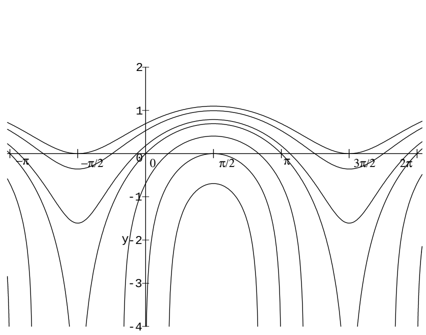
8.



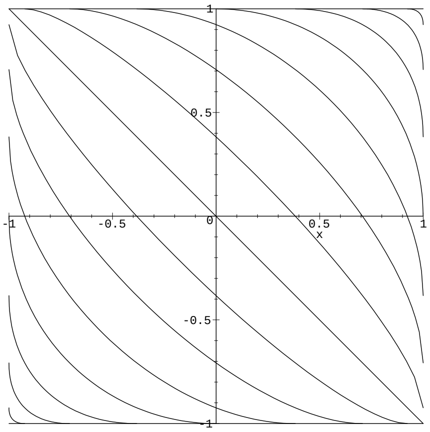
9.



6.



12.



Některé typy diferenciálních rovnic, které lze převést na rovnice se separovanými proměnnými

1. $y' = \cos(x-y)$ **2.** $y' = \sin(x+y)$ **3.** $y' = \frac{y^2}{x^2} - 2$ **4.** $y' = \frac{y}{x} + \frac{x}{y}$ **5.** $xy' = y \log \frac{y}{x}$
6. $y' = e^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}$ **7.** $y^2 + x^2 y' = xyy'$ **8.** $xy' - y = \sqrt{y^2+x^2}$ **9.** $y' = \frac{2y-x-5}{2x-y+4}$ **10.** $y' = \frac{2x-y+1}{x-2y+1}$
11. $y' = \frac{2(y+2)^2}{(x+y-1)^2}$ **12.** $y' = \frac{y^2-x}{2y(x+1)}$

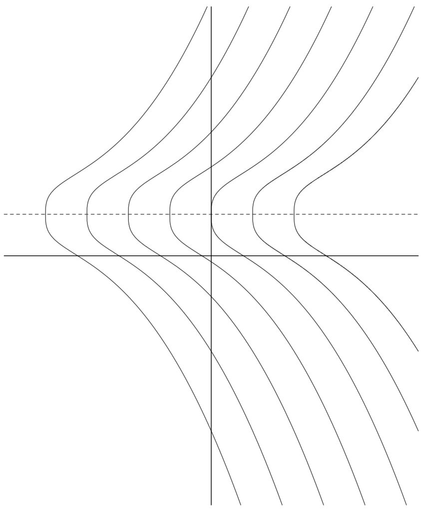
Výsledky a návody. **1.** substituce $y = x - z$. **2.** substituce $y = z - x$. **3.-8.** substituce $y = xz$. **9.-11.** substitucí $x = t + a$, $y = z + b$ pro vhodná a, b převést na předchozí typ. **12.** substitucí $y^2 = z$ převést na předchozí typ.

Kvalitativní analýza řešení autonomních rovnic

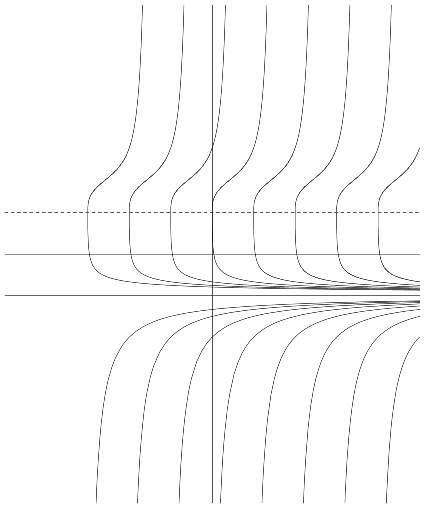
Načrtněte graf řešení, aniž explicitně vyřešíte rovnici

1. $y' = \frac{y^2+1}{y-1}$ **2.** $y' = \frac{y^3+1}{y-1}$ **3.** $y' = \frac{1}{y}\sqrt{1-y^2}$ **4.** $y' = (y+1)(y+2)(y+3)$
5. $y' = (y-1)^2 \sqrt[3]{y-2}(y-3)$ **6.** $y' = \sqrt[3]{\sin y}$ **7.** $y' = \sqrt{|\cos y|}$ **8.** $y' = \sin^2 y$
9. $y' = \cos y \cdot \sqrt{\sin y}$

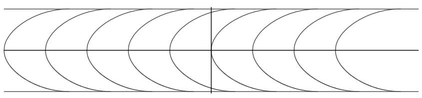
1.



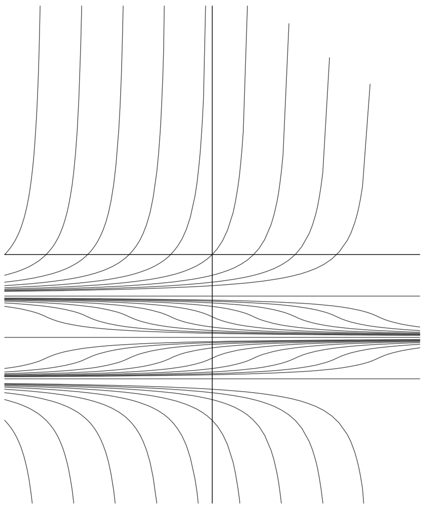
2.



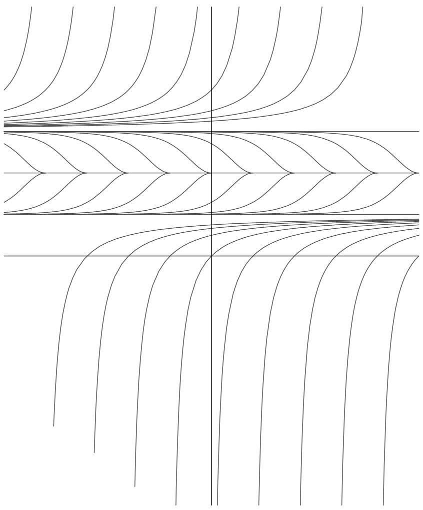
3.



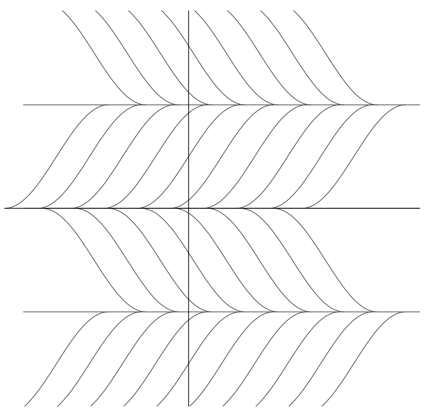
4.



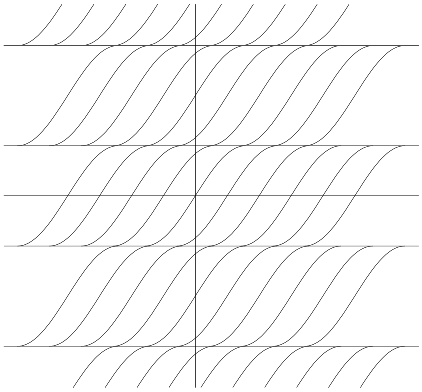
5.



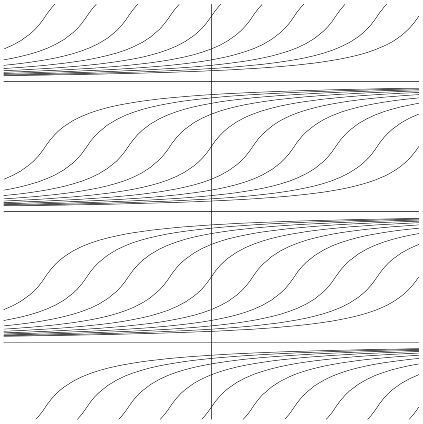
6.



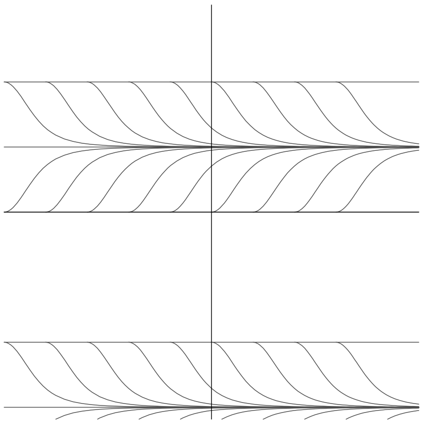
7.



8.



9.



Lineární rovnice prvního řádu

1. $y' = \frac{2y}{x}$ **2.** $y' - \frac{2}{x}y = 2x^3$ **3.** $y' = \frac{y}{x} - 1$ **4.** $y'x = y + x^2$ **5.** $y' + \frac{2y}{x} = \frac{e^{-x^2}}{x}$
6. $y' \cos x - y \sin x = \sin 2x$ **7.** $xy' + y = \log x + 1$ **8.** $(a^2 + x^2)y' + xy = 1$ $(a \in \mathbb{R})$
9. $(2x+1)y' + y = x$ **10.** $y' - y \operatorname{tg} x = \operatorname{cotg} x$ **11.** $y' + y \cos x = \sin 2x$ **12.** $y' + \frac{x+1}{x}y = 3xe^{-x}$

- -

Výsledky a návody. **1.** $y = cx^2$, $x \in (-\infty, 0)$ nebo $x \in (0, \infty)$, $c \in \mathbb{R}$. **2.** $y = x^4 + cx^2$, $x \in (-\infty, 0)$ nebo $x \in (0, \infty)$, $c \in \mathbb{R}$. **3.** $y = -x \log|x| + cx$, $x \in (-\infty, 0)$ nebo $x \in (0, \infty)$, $c \in \mathbb{R}$. **4.** $y = x^2 + cx$, $x \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$. **5.** $y = -\frac{1}{2x^2}e^{-x^2} + \frac{c}{2x^2}$, $x \in (-\infty, 0)$ nebo $x \in (0, \infty)$, $c \in \mathbb{R}$. **6.** $y = -\frac{\cos 2x}{2\cos x} + \frac{c}{\cos x}$, $x \in (-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$, $c \in \mathbb{R}$. **7.** $y = \log x + \frac{c}{x}$, $x \in (0, \infty)$, $c \in \mathbb{R}$. **8.** Pro $a = 0$: $y = \frac{\log|x|}{x} + \frac{c}{x}$, $x \in (-\infty, 0)$ nebo $x \in (0, \infty)$, $c \in \mathbb{R}$; pro $a \neq 0$: $y = \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}\left(\frac{1}{|a|}\log\frac{1+\sin\operatorname{arctg}\frac{x}{a}}{1-\sin\operatorname{arctg}\frac{x}{a}} + c\right)$, $x \in (-\infty, 0)$ nebo $x \in (0, \infty)$, $c \in \mathbb{R}$. **9.** $y = \frac{1}{3}(x-1) + \frac{c}{\sqrt{|2x+1|}}$, $x \in (-\infty, -\frac{1}{2})$ nebo $x \in (-\frac{1}{2}, \infty)$, $c \in \mathbb{R}$. **10.** $y = 1 + \frac{1}{2\cos x}\log\frac{1-\cos x}{1+\cos x} + \frac{c}{\cos x}$, $x \in (k\frac{\pi}{2}, (k+1)\frac{\pi}{2})$, $k \in \mathbb{Z}$, $c \in \mathbb{R}$. **11.** $y = 2(\sin x - 1) + ce^{-\sin x}$, $x \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$. **12.** $y = x^2e^{-x} + \frac{c}{x}e^{-x}$, $x \in (-\infty, 0)$ nebo $x \in (0, \infty)$, $c \in \mathbb{R}$.

Lineární rovnice s konstantními koeficienty

1. $y'' + 4y' + 4y = 0$ **2.** $y'' - 3y' + 2y = 0$ **3.** $y'' - 6y' + 13y = 0$ **4.** $y^{(4)} + 6y'' + 9y = 0$
5. $y'' - y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ **6.** $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x^2+x+1}$ **7.** $y'' + y = \operatorname{tg} x$ **8.** $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{\sqrt{4-x^2}}$
9. $y'' - 3y' + 2y = \frac{e^{2x}}{\sqrt{1-e^{2x}}}$ **10.** $y'' - 2y' - 3y = e^{4x}$ **11.** $y'' - 2y' + 5y = \cos x$ **12.** $y''' + y'' = x$
13. $y''' - y'' - 2y' = e^{2x} + x^3 + 3x^2 + 1$ **14.** $y'' + 3y' + 2y = \sin x + \sin 2x$ **15.** $4y''' + y' = 3e^x + 2\sin\frac{x}{2}$

Výsledky a návody. **1.** $y=ce^{-2x}+dxe^{-2x}$ **2.** $y=ce^{x}+de^{2x}$ **3.** $y=e^{3x}(c\cos 2x+d\sin 2x)$ **4.** $y=a\cos\sqrt{3}x+b\sin\sqrt{3}x+cx\cos\sqrt{3}x+dx\sin\sqrt{3}x$ **5.** $y=e^x(1+e^{2x})\operatorname{arctg} e^x+ce^x+de^{-x}$, $x\in\mathbb{R}$ **6.** $y=e^x\cdot\left(c+dx-\frac{1}{2}\log(x^2+x+1)+\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)$, $x\in\mathbb{R}$ **7.** $y=-\cos x\log\frac{1+\sin x}{|\cos x|}+c\cos x+d\sin x$, $x\in(-\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi)$, $k\in\mathbb{Z}$ **8.** $y=e^x\cdot\left(c+dx+\sqrt{4-x^2}+x\arcsin\frac{x}{2}\right)$, $x\in(-2,2)$ **9.** $y=-e^x\arcsin e^x-e^{2x}\operatorname{argtgh}\sqrt{1-e^{2x}}+ce^x+de^{2x}$, $x\in(-\infty,0)$ **10.** $y=\frac{1}{5}e^{4x}+ce^{-x}+de^{3x}$ **11.** $y=\frac{1}{5}\cos x-\frac{1}{10}\sin x+e^x(c\cos x+d\sin x)$ **12.** $y=-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+a+bx+ce^{-x}$ **13.** $y=(\frac{x}{6}-\frac{5}{36})e^{2x}-\frac{1}{8}x^4-\frac{1}{4}x^3-\frac{3}{8}x^2-\frac{7}{8}x+a+be^{-x}+ce^{2x}$ **14.** $y=-\frac{1}{20}\sin 2x-\frac{3}{20}\cos 2x-\frac{3}{10}\cos x+\frac{1}{10}\sin x+ce^{-x}+de^{-2x}$ **15.** $y=\frac{3}{5}e^x-x\sin\frac{x}{2}+a+b\cos\frac{x}{2}+c\sin\frac{x}{2}$

===

Lineární rovnice - snižování řádu, variace konstant

1. $y''-\frac{xy'}{x^2+1}+\frac{y}{x^2+1}=0$ **2.** $y''-x^2y'+(x^2-1)y=0$ **3.** $y''-\frac{2y}{x^2}=5$ **4.** $y''-\frac{1+x^2}{x}y'+2y=0$
5. $y''-\frac{5}{x}y'+\frac{5}{x^2}y=x^3$ **6.** $y''+\frac{1-x^2}{x}y'+\frac{y}{\log x}=0$ **7.** $y''+\frac{y}{x^2\log x}=0$

- -

Výsledky a návody. **1.** FS tvoří $y_1=x$ (lze uhodnout) a $y_2=x\log(x+\sqrt{x^2+1})-\sqrt{x^2+1}$ (na $\mathbb{R}$). **2.** FS tvoří $y_1=e^x$ (lze uhodnout) a $y_2=e^x\int_0^x e^{\frac{1}{3}t(t^2-6)}\,\mathrm{d}t$ (na $\mathbb{R}$). **3.** FS tvoří $y_1=x^2$ a $y_2=\frac{1}{x}$ (uhodnout lze kterékoliv z těchto dvou řešení), partikulární řešení je např. $y_0=\frac{5}{3}x^2\log|x|$ (z variace konstant vyjde $\frac{5}{3}x^2\log|x|-\frac{5}{9}x^2$, přitom $-\frac{5}{9}x^2$ je řešením homogenní rovnice). Vše na $(-\infty,0)$ nebo na $(0,+\infty)$. **4.** FS tvoří $y_1=x^2$ (lze uhodnout) a $y_2=x^2\int_1^x\frac{1}{t^3}e^{t^2/2}\,\mathrm{d}t$ (na $(0,+\infty)$; na $(-\infty,0)$ ve vzorci pro y_2 bude $\int_{-1}^x$). **5.** FS tvoří $y_1=x$ a $y_2=x^5$, partikulární řešení je např. $y_0=\frac{1}{4}x^5\log|x|$. Vše na $(-\infty,0)$ nebo na $(0,+\infty)$. **6.** FS tvoří $y_1\log x$ (lze uhodnout) a $y_2=\log x\int_2^x\frac{e^{t^2/2}}{t\log^2 t}\,\mathrm{d}t$ (na $(1,+\infty)$; na $(0,1)$ bude ve vzorci pro y_2 $\int_{1/2}^x$). **7.** FS tvoří $y_1=\log x$ (lze uhodnout) a $y_2=\int_2^x\frac{1}{\log^2 t}\,\mathrm{d}t$ (na $(1,+\infty)$; na $(0,1)$ bude ve vzorci pro y_2 $\int_{1/2}^x$).

===

Eulerovy rovnice

1. $x^2y''-9xy'+21y=0$ **2.** $x^2y''+xy'+y=x$ **3.** $y''-\frac{y'}{x}+\frac{y}{x^2}=\frac{2}{x}$
4. $x^2y''-2xy'+2y+x-2x^3=0$ **5.** $x^3y'''+xy'-y=0$ **6.** $x^4y^{(4)}+6x^3y'''-6xy'+12y=x^2$

- -

Výsledky a návody. **1.** ax^3+bx^7 **2.** $\frac{1}{2}x+a\cos\log|x|+b\sin\log|x|$ **3.** $x\log^2|x|+ax+bx\log|x|$ **4.** $x^3+x+x\log|x|+ax+bx^2$ **5.** $ax+bx\log|x|+cx\log^2|x|$ **6.** $\frac{1}{4}x^2\log|x|+ax^2+\frac{b}{x^2}+c|x|^{\sqrt{3}}+\frac{d}{|x|^{\sqrt{3}}}$

===

Exaktní rovnice, Bernoulliho rovnice

1. $2xyy'+y^2=0$ **2.** $(x+2y)y'+y+3x^2=0$ **3.** $3xy^2y'+2x+y^3=0$
4. $4x^3e^{x+y}+x^4e^{x+y}+2x+(x^4e^{x+y}+2y)y'=0$, $y(0)=1$.
5. $2x\sin y+y^3e^x+(x^2\cos y+3y^2e^x)y'=0$ **6.** $\frac{1}{2}y^2+2ye^x+(y+e^x)y'=0$
7. $1+(1+xy)e^{xy}+(1+x^2e^{xy})y'=0$ **8.** $2x\cos y+3x^2y+(x^3-x^2\sin y-y)y'=0$, $y(0)=2$
9. $3x^2+4xy+(2y+2x^2)y'=0$, $y(0)=1$ **10.** $3xy+y^2+(x^2+xy)y'=0$, $y(2)=1$
11. $ye^{xy}\cos 2x-2e^{xy}\sin 2x+2x+(xe^{xy}\cos 2x-3)y'=0$, $y(0)=0$
12. $xy'+y=y^2\log x$ **13.** $y'+2xy=2x^3y^3$ **14.** $y'+\frac{y}{x^2}+\frac{y^2}{x^2}=0$, $y(1)=\frac{1}{2}$. **15.** $3xy'-2y=\frac{x^3}{y^2}$
16. $8xy'-y=-\frac{1}{y^3\sqrt{x+1}}$ **17.** $x^2y'+2x^3y=y^2(1+2x^2)$

Výsledky a návody. (Výsledky jsou uvedeny bez definičních oborů – v některých případech je tvar definičního oboru zřejmý, jindy nelze jednoduše explicitně vyjádřit.) **1.** $xy^2 = c$ **2.** $xy + y^2 + x^3 = c$ **3.** $xy^3 + x^2 = c$ **4.** $x^4e^{x+y} + x^2 + y^2 = 1$ **5.** $x^2 \sin y + y^3e^x = c$ **6.** $\frac{1}{2}y^2e^x + ye^{2x} = c$ (integrační faktor e^x) **7.** $x + y + e^{xy} = c$ **8.** $x^3y + x^2 \cos y - \frac{1}{2}y^2 = 2$ **9.** $x^3 + y^2 + 2x^2y^2 = 1$ **10.** $x^3y + \frac{1}{2}x^2y^2 = 10$ (integrační faktor x) **11.** $e^{xy} \cos 2x - 3y + x^2 = 1$ **12.** $y(x) = \frac{1}{1+\log x+cx}$ **13.** $y^2 = -\frac{1}{x^2-\frac{1}{2}+2ce^{-x^2}}$ **14.** $y(x) = \frac{1}{-1+3e^{1-\frac{1}{x}}}$, $x \in (\frac{1}{1+\log 3}, +\infty)$ **15.** $y^3 = x^3 + cx^2$ **16.** $y^4 = \sqrt{x + 1} + c\sqrt{|x|}$ **17.** $\frac{1}{y} = 1 + \frac{1}{x} + 2e^{2x} \int \frac{e^{-2x}}{x}\,\mathrm{d}x$

Soustavy lineárních diferenciálních rovnic

1. $z' + y = 0$, $z' - y' = 3z + y$ **2.** $z' = -z + y + e^x$, $y' = z - y + e^x$ **3.** $5z' - 2y' + 4z - y = e^{-x}$, $z' + 8z - 3y = 5e^{-x}$ **4.** $z' + 3z + y = 0$, $y' - z + y = 0$, $y(0) = z(0) = 1$ **5.** $z' = y - 7z$, $y' + 2z + 5y = 0$ **6.** $z' = 2y - 5z + e^x$, $y' = z - 6y + e^{-2x}$ **7.** $z'' + y' + z = e^x$, $z' + y'' = 1$ **8.** $u' = w + v - u$, $v' = w + u - v$, $w' = u + v + w$, $(u(0) = 1,\ v(0) = w(0) = 0)$ **9.** $u' = v + w$, $v' = u + w$, $w' = u + v$, $(u(0) = -1,\ v(0) = 1,\ w(0) = 0)$

Řešte soustavy $y' = Ay + b(x)$, kde

10. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $b(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \end{pmatrix}$. **11.** $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -15 \\ 1 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & -6 \end{pmatrix}$, $b(x) = \begin{pmatrix} e^x \\ e^x \\ e^x \end{pmatrix}$. **12.** $A = \begin{pmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{pmatrix}$

13. $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, $b(x) = \begin{pmatrix} \sin x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. **14.** $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ **15.** $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -6 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 8 \end{pmatrix}$

16. $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & -3 \\ 4 & -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ **17.** $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -7 \\ 9 & -3 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}$ **18.** $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

- -

Výsledky a návody. **1.** $z = \frac{3B-A}{4}e^x + \frac{A+B}{4}e^{-3x}$, $y = \frac{A-3B}{4}e^x + \frac{3A+3B}{4}e^{-3x}$ **2.** $z = e^x + de^{-2x} + c$, $y = e^x - de^{-2x} + c$ **3.** $z = -2e^{-x} + ce^x + de^{-2x}$, $y = 3e^{-x} + 3ce^x + 2de^{-2x}$ **4.** $z = -(c + d)xe^{-2x} + de^{-2x}$, $y = (c + d)xe^{-2x} + ce^{-2x}$, s poč. podm. : $z = -2xe^{-2x} + e^{-2x}$, $y = 2xe^{-2x} + e^{-2x}$ **5.** $z = (c - d)e^{-6x} \sin x + de^{-6x} \cos x$, $y = ce^{-6x} \cos x + (c - 2d)e^{-6x} \sin x$ **6.** $z = \frac{7}{40}e^x + \frac{1}{5}e^{-2x} + \frac{2}{3}(c + d)e^{-4x} - \frac{1}{3}(2c - d)e^{-7x}$, $y = \frac{1}{40}e^x + \frac{3}{10}e^{-2x} + \frac{1}{3}(c + d)e^{-4x} + \frac{1}{3}(2c - d)e^{-7x}$ **7.** $z(x) = e^x - \frac{1}{6}x^3 - \frac{b+c}{2}x^2 + c + dx$, $y = -e^x + \frac{1}{24}x^4 + a + bx + \frac{b+c}{6}x^3 + \frac{d}{2}x^2$ **8.** $u = \frac{a+b-c}{3}e^{-x} + \frac{a+b+2c}{6}e^{2x} + \frac{a-b}{2}e^{-2x}$, $v = \frac{a+b-c}{3}e^{-x} + \frac{a+b+2c}{6}e^{2x} + \frac{b-a}{2}e^{-2x}$, $w = \frac{c-a-b}{3}e^{-x} + \frac{a+b+2c}{3}e^{2x}$, s poč.podm. $u = \frac{1}{3}e^{-x} + \frac{1}{6}e^{2x} + \frac{1}{2}e^{-2x}$, $v = \frac{1}{3}e^{-x} + \frac{1}{6}e^{2x} - \frac{1}{2}e^{-2x}$, $w = -\frac{1}{3}e^{-x} + \frac{1}{3}e^{2x}$ **9.** $u = \frac{a+b+c}{3}e^{2x} - \frac{b+c-2a}{3}e^{-x}$, $v = \frac{a+b+c}{3}e^{2x} - \frac{a+c-2b}{3}e^{-x}$, $w = \frac{a+b+c}{3}e^{2x} - \frac{a+b-2c}{3}e^{-x}$ s poč. podm. $u = -e^{-x}$, $v = e^{-x}$, $w = 0$ **10.** $y = (\frac{x-3}{4} + e^{2x}(bx + c), -\frac{3}{4} + e^{2x}(2bx + b + 2c), -\frac{2x^2+x+2}{4} + e^{2x}(bx + a + c))$, $a, b, c \in \mathbb{R}$. **11.** $y = (e^{-x}(-1 + 6c + 6bx), e^{-x}(15a + 2bx + b + 2c), e^{-x}(a + 2bx + 2c))$, $a, b, c \in \mathbb{R}$. **12.** $y = (6be^{-x} + 6ce^x, 10ae^{-x} + (3a + 9c)e^x, 3be^{-x} + (6a + 3c)e^x)$, $a, b, c \in \mathbb{R}$. **13.** $y = (-\frac{1}{10} \cos x - \frac{3}{10} \sin x - 2a \cdot e^{3x}, \frac{73}{500} \cos x + \frac{89}{500} \sin x + e^{3x} \cdot (ax^2 + bx + c), -\frac{43}{500} \cos x - \frac{49}{500} \sin x + e^{3x} \cdot (-ax^2 - (2a + b)x - 4a - b - c)$, $a, b, c \in \mathbb{R}$. **14.** $y = ((a + 3b)e^x \sin x + (3a - b)e^x \cos x, (2a+b)e^x \sin x + (a-2b)e^x \cos x + ce^{4x}, (2b-a)e^x \sin x + (2a+b)e^x \cos x + ce^{4x})$, $a, b, c \in \mathbb{R}$. **15.** $y = (e^x(bx^2+cx+d), e^x(\frac{1}{3}bx^2 - \frac{1}{3}(4b-c)x - \frac{2}{9}b - \frac{2}{3}c + \frac{1}{3}d, e^x(a+bx^2+cx+d), e^x(\frac{1}{3}bx^2 - \frac{1}{3}(2b-c)x - \frac{2}{9}b - \frac{1}{3}c + \frac{1}{3}d)$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. **16.** $y = (e^{2x}(cx+d), e^{2x}(cx-c+d), e^{2x}(ax+b), e^{2x}((a+c)x - \frac{1}{3}a + b + d)$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. **17.** $y = (cx+d, (3c - \frac{5}{2}a)x + \frac{7}{8}a - \frac{5}{2}b - c + 3d, ax+b, \frac{1}{2}ax - \frac{1}{8}a + \frac{1}{2}b)$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. **18.** $y = (e^x(a \cos x + b \sin x) + c \cos x + d \sin x, \frac{1}{2}e^x((a+b) \cos x + (b-a) \sin x) + c \cos x + d \sin x, e^x(a \cos x + b \sin x) + (c - d) \cos x + (c + d) \sin x, e^x(a \cos x + b \sin x))$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

Pro následující soustavy najděte stacionární řešení a rozhodněte o jejich stabilitě

1. $z' = z - z^2 - 2zy$, $y' = 2y - 2y^2 - 3zy$. **2.** $z' = -\beta zy + \mu$, $y' = \beta zy - \gamma y$. **3.** $u' = au - buv$, $v' = -cv + duv$, $w' = w + u^2 + v^2$. **4.** $u' = -u - uv^2$, $v' = -v - u^2v$, $w' = 1 - w + u^2$. **5.** $y' = z \sin \pi y$, $z' = zy^2 - z$. **6.** $u' = u - v^2$, $v' = u^2 - v$, $w' = e^w - u$. **7.** $z' = z - z^3 - zy^2$, $y' = 2y - y^5 - yz^4$. **8.** $z' = \mathrm{tg}(z + y)$, $y' = z + z^3$ **9.** $z' = e^y - z$, $y' = e^z - y$.