I. Zjistěte, zda $(V,\oplus,\odot)$ je vektorový prostor nad $\mathbf{K}$, jestliže

1. $\mathbf{K}=\mathbf{R}$, V je množina všech reálných funkcí definovaných na $\mathbf{R}$,
a) $(f\oplus g)(x)=f(x)+g(x)$, $(\lambda\odot g)(x)=\lambda g(x)$ pro $f,g\in V$, $\lambda\in\mathbf{R}$, $x\in\mathbf{R}$.
b) $(f\oplus g)(x)=f(x)g(x)$, $(\lambda\odot g)(x)=\lambda g(x)$ pro $f,g\in V$, $\lambda\in\mathbf{R}$, $x\in\mathbf{R}$.
2. $\mathbf{K}=\mathbf{R}$, $V=(0,+\infty)$, $u\oplus v=uv$, $\lambda\odot v=\lambda v$. **3.** $\mathbf{K}=\mathbf{R}$, $V=\mathbf{C}$, $u\oplus v=u+v$, $\lambda\odot v=\lambda v$.
4. $\mathbf{K}=\mathbf{C}$, $V=\mathbf{R}$, $u\oplus v=u+v$, $\lambda\odot v=|\lambda|v$.
5. $\mathbf{K}=\mathbf{R}$, $V=\mathbf{R}^2$, $u\oplus v=u+v$, $\lambda\odot[u_1,u_2]=[\lambda^3u_1,\lambda u_2]$.
6. $\mathbf{K}=\mathbf{C}$, $V=\mathbf{C}^2$, $[u_1,u_2]\oplus[v_1,v_2]=[u_1+v_1,u_2+v_2]$, a) $\lambda\odot[u_1,u_2]=[\bar\lambda u_1,\bar\lambda u_2]$; b) $\lambda\odot[u_1,u_2]=[\lambda u_1,\bar\lambda u_2]$. **7.** $\mathbf{K}=\mathbf{C}$, $V=\mathbf{R}^2$, $[u_1,u_2]\oplus[v_1,v_2]=[u_1+v_1,u_2+v_2]$, $\lambda\odot[u_1,u_2]=[u_1\operatorname{Re}\lambda-u_2\operatorname{Im}\lambda,u_2\operatorname{Re}\lambda+u_1\operatorname{Im}\lambda]$.

Zjistěte, zda je U vektorovým podprostorem V, jestliže

8. $V=\mathbf{R}^3$; a) $U=\{\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^3\colon x_1-x_2=0\}$, b) $U=\{\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^3\colon x_1=x_2^2\}$, c) $U=\{\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^3\colon x_1+x_3=1\}$. **9.** $V=\mathbf{R}^2$, $U=\{\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^2\colon x_1\geq 0\}$. **10.** $V=\mathcal{C}(\langle 0,1\rangle)$; a) $U=\{f\in V\colon f(0)+f(1)=f(1/2)\}$, b) $U=\{f\in V\colon f(0)=(f(1))^2\}$, c) $U=\{f\in V\colon \forall x\in[0,1]\colon |f(x)|\leq 1\}$, d) $U=\{f\in V\colon \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=0\}$, e) $U=\{f\in V\colon \int_0^{1/2} f(x)\,\mathrm{d}x=17\}$, f) $U=\{f\in V\colon \int_0^1 (f(x))^3\,\mathrm{d}x=0\}$, g) $U=\{f\in V\colon \int_{1/2}^1 (f(x))^2\,\mathrm{d}x=0\}$.

Výsledky a návody. **1.** a) ANO, b) NE (neplatí např. (iv)). **2.** NE ($\odot$ není operace). **3.** ANO **4.** NE (neplatí (vi)). **5.** NE (neplatí (vi)). **6.** a) ANO, b) ANO. **7.** ANO. **8.** a) ANO, b) NE ($[1,1,0]\in U$, $2\cdot[1,1,0]\notin U$), c) NE ($[0,0,0]\notin U$). **9.** NE ($[1,0]\in U$, $-[1,0]\notin U$). **10.** a) ANO, b) NE ($1\in U$, $2\cdot 1\notin U$), c) NE ($1\in U$, $2\cdot 1\notin U$), d) ANO, e) NE ($0\notin U$), f) NE (nechť $f(x)=\frac12-x$ a $g(x)=|2x-1|-\frac12$; pak $f,g\in U$, $f+g\notin U$), g) ANO ($U=\{f\in V\colon \forall x\in\langle\frac12,1\rangle\colon f(x)=0\}$).

II. Určete dimenzi a nalezněte nějakou bázi vektorového prostoru V, kde

1. $V=\operatorname{lin}_{\mathbf{R}}\{[1,1,1],[1,2,2],[10,11,11]\}\subset\mathbf{R}^3$.
2. $V=\operatorname{lin}_{\mathbf{R}}\{[1,1,1,2,2],[-1,-2,-2,-2,2],[19,1,1,1,1],[-1,-3,-3,-2,6]\}\subset\mathbf{R}^5$.
3. $V=\operatorname{lin}_{\mathbf{R}}\{x+7,x^2-x-1,x^2+3,x-5\}\subset C(\langle 0,1\rangle)$.
4. $V=\{\sin x,\cos x,\sin 2x,\cos 2x\}\subset C(\langle 0,\pi\rangle)$. **5.** $V=\mathbf{C}^2$ jako vektorový prostor nad $\mathbf{R}$.
6. $V=M(2\times 3)$. **7.** $V=\{\mathbb{A}\in M(3\times 3)\colon \mathbb{A}^T=\mathbb{A}\}$.
8. $V=\{[x_1,x_2,x_3]\in\mathbf{R}^3\colon x_1+x_2-x_3=0\}$.
9. $V=\{[x_1,x_2,x_3,x_4]\in\mathbf{R}^4\colon x_1+x_3-x_4=0, x_2+x_4=0, x_1+x_2+x_4=0\}$.
10. $V=\{[x_1,x_2,x_3,x_4]\in\mathbf{R}^4\colon \begin{pmatrix}1&-2&2&3\\2&8&-1&0\\1&2&2&2\\1&1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\mathbf{o}\}$.
11. $V=\{f\in C(\mathbf{R})\colon f$ má všude pátou derivaci a $f^{(5)}=0$ na $\mathbf{R}\}$.

Výsledky a návody. **1.** $\dim V=2$, báze je například $\{[1,1,1],[0,1,1]\}$ (nebo též $\{[1,1,1],[1,2,2]\}$). **2.** $\dim V=3$, báze je například $\{[1,1,1,2,2],[0,-1,-1,0,4],[0,0,0,37,109]\}$. **3.** $\dim V=3$, báze je například $\{1,x,x^2\}$. **4.** $\dim V=4$, množina ze zadání je báze. **5.** $\dim V=4$, báze je například $\{[1,0],[i,0],[0,1],[0,i]\}$. **6.** $\dim V=6$, bázi tvoří například šestice matic, které mají na jednom místě 1 a na ostatních 0. **7.** $\dim V=6$, bázi tvoří například
$\left\{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\right\}$. **8.** $\dim V=2$, báze je například $\{[1,0,1],[0,1,1]\}$. **9.** $\dim V=1$, báze je například $\{[0,-1,1,1]\}$. **10.** $\dim V=0$, báze je $\emptyset$ ($V=\{[0,0,0,0]\}$). **11.** $\dim V=5$, báze je například $\{1,x,x^2,x^3,x^4\}$.

III. Je $L\colon U \to V$ lineární zobrazení? Pokud ano, jak vypadá $\mathrm{Ker}(L)$ a $\mathrm{Im}(L)$?

1. $U = \mathbf{R}^3$, $V = \mathbf{R}^4$; a) $L(u,v,w) = [u+w, w-v+7u, u, u]$, b) $L(u,v,w) = [u^2, v, 0, 0]$, c) $L(u,v,w) = [0,0,0,0]$, d) $L(u,v,w) = [u, v-1, 4w, u+w]$, e) $L(u,v,w) = [u,v,w,w]$, f) $L(u,v,w) = [u+v, u-v, w, 10u]$.

2. $U = C(\mathbf{R})$, $V = C(\mathbf{R})$; a) $L(f)(x) = f(x+1) - f(x)$, b) $L(f)(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$, c) $L(f)(x) = f(x^2)$, d) $L(f)(x) = \int_{x-1}^{x+1} f(t)\,\mathrm{d}t$.

3. $U = C^1(\mathbf{R})$, $V = C(\mathbf{R})$; a) $L(f)(x) = f'(x)$, b) $L(f)(x) = f(x) - f'(x)$, c) $L(f)(x) = \int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t$.

Výsledky a návody. **1.** a) ANO, $\mathrm{Ker}(L) = \{[0,0,0]\}$, $\mathrm{Im}(L) = \mathrm{lin}_{\mathbf{R}}\{[1,7,1,1],[0,-1,0,0],[1,1,0,0]\}$; b) NE; c) ANO, $\mathrm{Ker}(L) = \mathbf{R}^3$, $\mathrm{Im}(L) = \{[0,0,0,0]\}$; d) NE; e) ANO, $\mathrm{Ker}(L) = \{[0,0,0]\}$, $\mathrm{Im}(L) = \mathrm{lin}_{\mathbf{R}}\{[1,0,0,0],[0,1,0,0],[0,0,1,1]\}$; f) ANO, $\mathrm{Ker}(L) = \{[0,0,0]\}$, $\mathrm{Im}(L) = \mathrm{lin}_{\mathbf{R}}\{[1,1,0,10],[1,-1,0,0],[0,0,1,0]\}$. **1.** a) ANO, $\mathrm{Ker}(L)$ tvoří 1-periodické funkce, $\mathrm{Im}(L) = C(\mathbf{R})$ (mírně obtížnější); b) ANO, $\mathrm{Ker}(L) = \{0\}$, $\mathrm{Im}(L) = \{f \in C^1(\mathbf{R})\colon f(0) = 0\}$; c) ANO, $\mathrm{Ker}(L) = \{f \in C(\mathbf{R})\colon f \restriction \langle 0, +\infty) = 0\}$, $\mathrm{Im}(L)$ tvoří sudé funkce; d) ANO, $\mathrm{Ker}(L)$ tvoří 2-periodické funkce splňující navíc $\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$, $\mathrm{Im}(L) = C^1(\mathbf{R})$ (obojí mírně obtížnější). **2.** a) ANO, $\mathrm{Ker}(L)$ tvoří konstantní funkce, $\mathrm{Im}(L) = C(\mathbf{R})$; b) ANO, $\mathrm{Ker}(L) = \mathrm{lin}_{\mathbf{R}}\{e^x\} = \{ae^x\colon a \in \mathbf{R}\}$, $\mathrm{Im}(L) = C(\mathbf{R})$; c) ANO, $\mathrm{Ker}(L)$ tvoří konstantní funkce, $\mathrm{Im}(L) = \{f \in C^1(\mathbf{R})\colon f(0) = 0\}$.

IV. Bilineární formy

1. Zjistěte, zda B je bilineární forma, pokud ano, napište reprezentující matici a rozhodněte, zda B je symetrická. a) $B([x_1,x_2],[y_1,y_2]) = x_1 + y_2$; b) $B([x_1,x_2],[y_1,y_2]) = (x_1+y_2)(x_2+y_1)$; c) $B([x_1,x_2],[y_1,y_2]) = x_1y_2 + x_2y_1$; d) $B([x_1,x_2],[y_1,y_2]) = x_1^2 + x_2^2$; e) $B([x_1,x_2],[y_1,y_2]) = x_1x_2 + y_1y_2$; f) $B([x_1,x_2],[y_1,y_2]) = (x_1-x_2)(y_1+9y_2)$.

2. Zjistěte, zda následující matice jsou pozitivně definitní, negativně definitní atd.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; e) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$; f) $\begin{pmatrix} -10 & 1 & 1 \\ 1 & -10 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$;

g) $\begin{pmatrix} 10 & 1 & 3 \\ 1 & 10 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; h) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & 10 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$; i) $\begin{pmatrix} -3 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & -3 \end{pmatrix}$; j) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

Výsledky a návody. **1.** a), b), d), e) NE; c) ANO, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, je symetrická; f) ANO, $\begin{pmatrix} 1 & 9 \\ -1 & -9 \end{pmatrix}$, není symetrická. **2.** a) ID, b) PD, c),d) PSD, ne PD; e) ID, f) ND, g) PD, h) PSD, ne PD, i),j) ID.

V. Najděte vlastní čísla a všechny jim příslušné vlastní vektory pro matice

1. $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ **2.** $\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$ **3.** $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ **4.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$ **5.** $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & 2 \\ -5 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

6. $\begin{pmatrix} 5 & 0 & -2 \\ 2 & 3 & -2 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ **7.** $\begin{pmatrix} 8 & -1 & -3 \\ 8 & 1 & -4 \\ 7 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ **8.** $\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 6 & -2 & -2 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ **9.** $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 5 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

10. $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ **11.** $\begin{pmatrix} -23 & 21 & 3 & -17 \\ -40 & 35 & 4 & -31 \\ 58 & -50 & -5 & 47 \\ -8 & 6 & 0 & -7 \end{pmatrix}$

Výsledky a návody. (ve formátu: (vlastní číslo, násobnost, množina vlastních vektorů)) **1.** $(1,1,\{t\cdot[1,2]\colon t\in\mathbf{C}\setminus\{0\}\})$, $(2,1,\{t\cdot[1,1]\colon t\in\mathbf{C}\setminus\{0\}\})$. **2.** $(6,1,\{t\cdot[2,1]\colon t\in\mathbf{C}\setminus\{0\}\})$, $(-5,1,\{t\cdot[3,-4]\colon t\in\mathbf{C}\setminus\{0\}\})$. **3.** $(1+i,1,\{t\cdot[1,i]\colon t\in\mathbf{C}\setminus\{0\}\})$, $(1-i,1,\{t\cdot[1,-i]\colon t\in\mathbf{C}\setminus\{0\}\})$. **4.** $(3,2,\{t\cdot[1,1]\colon t\in\mathbf{C}\setminus\{0\}\})$. **5.** $(1,1,\{t\cdot[1,1,1]\colon t\in\mathbf{C}\setminus\{0\}\})$, $(2,1,\{t\cdot[1,2,1]\colon t\in\mathbf{C}\setminus\{0\}\})$, $(3,1,\{t\cdot[1,1,2]\colon t\in\mathbf{C}\setminus\{0\}\})$. **6.** $(1,1,\{t\cdot[1,1,2]\colon t\in\mathbf{C}\setminus\{0\}\})$, $(3,2,\{t\cdot[1,0,1]+s\cdot[0,1,0]\colon[s,t]\in\mathbf{C}^2\setminus\{[0,0]\}\})$. **7.** $(1,1,\{t\cdot[1,1,2]\colon t\in\mathbf{C}\setminus\{0\}\})$, $(3,2,\{t\cdot[1,2,1]\colon t\in\mathbf{C}\setminus\{0\}\})$. **8.** $(0,3,\{t\cdot[1,3,0]+s\cdot[0,-1,1]\colon[s,t]\in\mathbf{C}^2\setminus\{[0,0]\}\})$. **9.** $(0,3,\{t\cdot[1,1,2]\colon t\in\mathbf{C}\setminus\{0\}\})$. **10.** $(1,3,\{t\cdot[1,1,1]\colon t\in\mathbf{C}\setminus\{0\}\})$. **11.** $(i,2,\{t\cdot[3,4,-5+i,0]+s\cdot[-7-i,0,-8-10i,8]\colon[s,t]\in\mathbf{C}^2\setminus\{[0,0]\}\})$, $(-i,2,\{t\cdot[3,4,-5-i,0]+s\cdot[-7+i,0,-8+10i,8]\colon[s,t]\in\mathbf{C}^2\setminus\{[0,0]\}\})$.

==

VI. Rozvoj funkce v bodě

1. Najděte hlavní část rozvoje k-tého řádu v bodě a pro funkce $f+g$, $f-g$, fg, f/g, g/f (pokud existují), jsou li zadány hlavní části rozvoje funkcí f a g:
a) $k=1$, $a=0$, f: x, g: $1+x$; b) $k=1$, $a=1$, f: $1-2(x-1)$, g: $1+(x-1)$; c) $k=2$, $a=3$, f: $7+(x-3)+\frac{1}{2}(x-3)^2$, g: $6(x-3)$; d) $k=3$, $a=-2$, f: $1+(x+2)^3$, g: $(x+2)-\frac{1}{2}(x+2)^2$;
2. Najděte hlavní část rozvoje k-tého řádu funkce $f\circ g$ v bodě a, je-li zadána hlavní část rozvoje funkce g v bodě a a funkce f v bodě $g(a)$. a) $k=1$, f, g: $1+(x-1)$; b) $k=1$, f: $2+(x-7)$, g: $7+(x-1)$; c) $k=2$, f: $(x-6)+3(x-6)^2$, g: $6+x+x^2$; d) $k=3$, f: $(x-2)$, g: $2+(x-3)^2+(x-3)^3$;

- -

Výsledky a návody. **1.** a) $f+g$: $1+2x$; $f-g$: -1; fg: x; f/g: x. b) $f+g$: $2-(x-1)$; $f-g$: $-3(x-1)$; fg: $1-(x-1)$; f/g: $1-3(x-1)$; g/f: $1+3(x-1)$. c) $f+g$: $7+7(x-3)^2+\frac{1}{2}(x-3)^2$; $f-g$: $7-5(x-3)^2+\frac{1}{2}(x-3)^2$; fg: $42(x-3)+6(x-3)^2$; g/f: $\frac{6}{7}(x-3)-\frac{6}{49}(x-3)^2$. d) $f+g$: $1+(x+2)-\frac{1}{2}(x+2)^2+(x+2)^3$; $f-g$: $1-(x+2)+\frac{1}{2}(x+2)^2+(x+2)^3$; fg: $(x+2)-\frac{1}{2}(x+2)^2$; g/f: $(x+2)-\frac{1}{2}(x+2)^2$. **2.** a) $1+(x-1)$; b) $2+(x-1)$; c) $4x^2$; d) $(x-3)^2+(x-3)^3$.

==

VII. Najděte Taylorův polynom k-tého řádu v bodě 0 pro funkce

1. $\operatorname{tg} x$, $k=4$. **2.** $\cos(\sin x)$, $k=5$. **3.** $\sin(\sin x)$, $k=6$. **4.** $\sin(1-\cos x)$, $k=3$. **5.** $\operatorname{arctg} x$, $k\in\mathbf{N}$. **6.** $\arcsin x$, $k\in\mathbf{N}$.

Spočtěte limity

7. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x-e^{\frac{-x^2}{2}}}{x^4}$ **8.** $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x\sin x-x(1+x)}{x^3}$ **9.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[6]{x^6+x^5}-\sqrt[6]{x^6-x^5}\right)$

10. $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{3}{2}}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}-2\sqrt{x}\right)$ **11.** $\lim\limits_{x\to0}\frac{a^x+a^{-x}-2}{x^2}$ $(a>0)$ **12.** $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)$

13. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)$ **14.** $\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}-\frac{\cos x}{\sin x}\right)$ **15.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\left(x^3-x^2+\frac{x}{2}\right)e^{\frac{1}{x}}-\sqrt{x^6+1}\right)$

16. Najděte $n\in\mathbb{N}$, aby limita a) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\operatorname{tg}(\sin x)-\sin(\operatorname{tg} x)}{x^n}$, b) $\lim\limits_{x\to0}\frac{(1+x)^x-1}{x^n}$ c) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x-\cos(\operatorname{tg} x)}{x^n}$, d) $\lim\limits_{x\to0}\frac{e-(1+x)^{\frac{1}{x}}}{x^n}$ byla konečná a různá od 0, a spočtěte tuto limitu.

17. Najděte $a,b\in\mathbb{R}$, aby $\lim\limits_{x\to0}\frac{x-(a+b\cos x)\sin x}{x^4}=0$.

18. Najděte $a,b\in\mathbb{R}$, aby $\lim\limits_{x\to0}\frac{x-a\sin x-b\operatorname{tg} x}{x^4}=0$ a spočtěte $\lim\limits_{x\to0}\frac{x-a\sin x-b\operatorname{tg} x}{x^5}$.

==

VIII. Taylorův polynom – aplikace Lagrangeova tvaru zbytku

1. Spočtěte e^2 s chybou menší než 10^{-4}. **2.** Spočtěte $\log 1.1$ s chybou menší než 10^{-4}. **3.** Spočtěte $\sqrt{5}$ s chybou menší než 10^{-3}. **4.** Spočtěte $\sqrt[3]{1.01}$ s chybou menší než 10^{-8}. **5.** Kolik členů Taylorova polynomu funkce cos v 0 stačí vzít, aby pro každé $x\in(-0.5,0.5)$ byla chyba menší než 10^{-3}?

IX. Nalezněte lokální extrémy následujících funkcí v uvedených množinách:

1. $f(x,y) = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2; M = \mathbb{R}^2$
2. $f(x,y) = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y}; M = \{(x,y); x > 0; y > 0\}$
3. $z(x,y) = x^2y^3(6 - x - y); M = \{(x,y); x > 0; y > 0\}$
***4.** $z(x,y) = x^2y^3(6 - x - y); M = \mathbb{R}^2$
5. $f(x,y,z) = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z}$, $M = \{(x,y,z); x > 0, y > 0, z > 0\}$.
6. $f(x,y,z) = x^4 - y^4 - x^2 - 2xy - y^2, \quad M = \mathbb{R}^2$
7. Dokažte, že funkce $f(x,y) = (1 + e^y)\cos x - ye^y$ nabývá lokálního maxima v nekonečně mnoha bodech, avšak lokálního minima ani v jednom bodě.

===

X. Najděte všechna řešení diferenčních rovnic (s počátečními podmínkami)

1. $y(n+2) + 4y(n+1) + 4y(n) = 0$ **2.** $y(n+2) - 3y(n+1) + 2y(n) = 0$
3. $y(n+2) - 6y(n+1) + 13y(n) = 0$, $y(1) = 0$ **4.** $y(n+2) - 2y(n+1) - 3y(n) = 0$, $y(1) = 2$, $y(2) = 1$ **5.** $y(n+2) - y(n+1) - y(n) = 0$, $y(1) = y(2) = 1$ **6.** $y(n+4) + 6y(n+2) + 9y(n) = 0$
7. $y(n+2) - 2y(n+1) + 2y(n) = \cos n$ **8.** $y(n+3) - y(n+2) - 2y(n+1) + 2y(n) = n + 2^n$
9. $y(n+2) + 3y(n+1) + 2y(n) = \sin n + \sin 2n$ **10.** $8y(n+3) + y(n) = 3n + 1/2^n$
11. $y(n+2) - 3y(n+1) + 2y(n) = n^2$, $y(1) = 3$, $y(2) = 2$. **12.** $y(n+2) - y(n) = 17$, $y(1) = y(2) = 0$.