I. Najděte všechna řešení diferenčních rovnic (s počátečními podmínkami)

1. $y(n+2)+4y(n+1)+4y(n)=0$ **2.** $y(n+2)-3y(n+1)+2y(n)=0$
3. $y(n+2)-6y(n+1)+13y(n)=0$, $y(1)=0$
4. $y(n+2)-2y(n+1)-3y(n)=0$, $y(1)=2$, $y(2)=1$
5. $y(n+2)-y(n+1)-y(n)=0$, $y(1)=y(2)=1$ **6.** $y(n+4)+6y(n+2)+9y(n)=0$
7. $y(n+4)-y(n)=\sin\frac{n\pi}{4}$ **8.** $y(n+4)+y(n)=\sin\frac{n\pi}{4}$ **9.** $y(n+2)-y(n+1)+y(n)=\sin\frac{n\pi}{3}$
10. $y(n+2)-2y(n+1)+2y(n)=\cos n$ **11.** $y(n+3)-y(n+2)-2y(n+1)+2y(n)=n+2^n$
12. $y(n+2)+3y(n+1)+2y(n)=\sin n+\sin 2n$ **13.** $8y(n+3)+y(n)=3n+1/2^n$
14. $y(n+2)-3y(n+1)+2y(n)=n^2$, $y(1)=3$, $y(2)=2$.
15. $y(n+2)-y(n)=17$, $y(1)=y(2)=0$.

- -

Výsledky a návody. **1.** $y(n)=(a+bn)\cdot(-2)^n$ $(a,b\in\mathbf{R})$ **2.** $y(n)=a+b\cdot 2^n$ $(a,b\in\mathbf{R})$ **3.** $y(n)=\frac{a}{2}\cdot(\sqrt{13})^n\cdot(2\cos(n\arccos\frac{3}{\sqrt{13}})-3\sin(n\arccos\frac{3}{\sqrt{13}}))$ $(a\in\mathbf{R})$ **4.** $y(n)=\frac{1}{4}(3^n-5\cdot(-1)^n)$ **5.** $y(n)=\frac{1}{\sqrt5}\cdot((\frac{1+\sqrt5}{2})^n-(\frac{1-\sqrt5}{2})^n)$ **6.** $(\sqrt3)^n((a+bn)\cos\frac{n\pi}{2}+(c+dn)\sin\frac{n\pi}{2})$ $(a,b,c,d\in\mathbf{R})$ **7.** $y(n)=\frac12\sin\frac{n\pi}{4}+a+b\cdot(-1)^n+c\cos\frac{n\pi}{2}+d\sin\frac{n\pi}{2}$ $(a,b,c,d\in\mathbf{R})$ **8.** $y(n)=-\frac14 n\sin\frac{n\pi}{4}+a\cos\frac{n\pi}{4}+b\sin\frac{n\pi}{4}+c\cos\frac{3n\pi}{4}+d\sin\frac{3n\pi}{4}$ $(a,b,c,d\in\mathbf{R})$ **9.** $y(n)=-n(\frac{\sqrt3}{6}\cos\frac{n\pi}{3}+\frac12\sin\frac{n\pi}{3})+a\cos\frac{n\pi}{3}+b\sin\frac{n\pi}{3}$ $(a,b\in\mathbf{R})$ **10.** $y(n)=\frac{2\sin^2 1\cos 1-1-\cos 1}{8\sin^2 1\cos 1-1-4\sin^2 1-\cos 1}\cos n+\frac{\sin^3 1}{8\sin^2 1\cos 1-1-4\sin^2 1-\cos 1}\sin n+(\sqrt2)^n(a\cos\frac{n\pi}{4}+b\sin\frac{n\pi}{4})$ $(a,b\in\mathbf{R})$ **11.** $y(n)=2^{n-1}-\frac12 n^2-\frac32 n+a+b(\sqrt2)^n+c(-\sqrt2)^n$ $(a,b,c\in\mathbf{R})$ **12.** $y(n)=\frac12(\frac{3\cos 1+3+4\sin^2 1\cos 1}{9+6\sin^2 1+9\cos 1+8\sin^2 1\cos 1}\sin n-\frac{\sin 1(4\sin^2 1+5)}{9+6\sin^2 1+9\cos 1+8\sin^2 1\cos 1}\cos n)++\frac12(\frac{3\cos 2+3+4\sin^2 2\cos 2}{9+6\sin^2 2+9\cos 2+8\sin^2 2\cos 2}\sin 2n-\frac{\sin 2(4\sin^2 2+5)}{9+6\sin^2 2+9\cos 2+8\sin^2 2\cos 2}\cos 2n)+a\cdot(-1)^n+b\cdot(-2)^n$ $(a,b\in\mathbf{R})$ **13.** $y(n)=\frac13 n-\frac89+\frac{1}{2^{n+1}}+a\cdot(-\frac12)^n+\frac{1}{2^n}(b\cos\frac{n\pi}{3}+c\sin\frac{n\pi}{3})$ $(a,b,c\in\mathbf{R})$ **14.** $y(n)=5\cdot 2^{n-1}-\frac13 n^3-\frac12 n^2-\frac{13}{6}n+1$ **15.** $y(n)=\frac{17}{2}n-\frac{17}{4}\cdot(-1)^n-\frac{51}{4}$

==

II. Rovnice se separovanými proměnnými

1. Nalezněte maximální řešení rovnice $y'=y$ procházející bodem $[0,1]$.
2. Pro diferenciální rovnici $yy'+xy^2=x$ nalezněte
(a) všechna maximální řešení, (b) maximální řešení procházející bodem $[1,0]$.
3. Pro diferenciální rovnici $y'=\frac{y^2}{x^2}$ nalezněte
(a) všechna maximální řešení, (b) maximální řešení procházející bodem $[1,\frac12]$,
(c) všechna maximální řešení, která jsou na svém definičním oboru omezená.
4. Pro diferenciální rovnici $y'=-\frac{(1+y^2)x}{1+x^2}$ nalezněte
(a) všechna maximální řešení, (b) maximální řešení procházející bodem $[0,1]$.
5. Nalezněte řešení rovnice $y'=\sqrt[5]{y^2}$, které splňuje $y(-2)=-\frac35$ a $y(0)=1$.
6. Nalezněte všechna maximální řešení rovnice $y'=\frac{\cos x}{e^y}$. Určete množinu všech bodů v $\mathbb{R}^2$, kterými prochází právě jedno řešení definované na celém $\mathbb{R}$.
7. Řešte rovnici $y'(2-e^x)=-3e^x\operatorname{tg}y\cos^2 y$. Pro která A existuje řešení s vlastností
$$\lim_{x\to+\infty}y(x)-\lim_{x\to-\infty}y(x)=A?$$

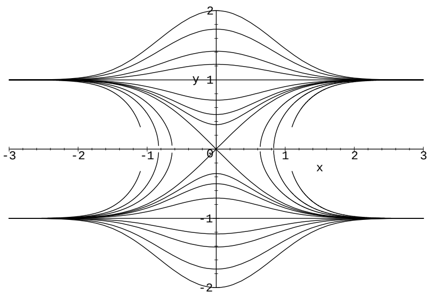
Najděte všechna maximální řešení následujících rovnic

8. $yy'=\frac{1-2x}{y}$ **9.** $xy'+y=y^2$ **10.** $y'=10^{x+y}$ **11.** $e^{-y}(1+y')=1$
12. $y'+\sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}}=0$, $x\in(-1,1)$ (*na zbylých intervalech) **13.** $y'\sin x=y\ln y$, $y(\frac{\pi}{2})=1$
14. $y'=\frac{1+y^2}{1+x^2}$, $y(0)=1$ **15.** $y-xy'=b(1+x^2y')$, $y(1)=1$ $(b\in\mathbb{R})$

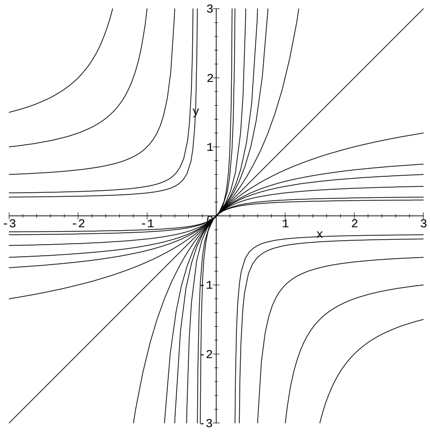
Výsledky a návody. **1.** $y(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$. **2.** (a) singulární řešení $y_0^1 = 1$ na $\mathbb{R}$, $y_0^2 = -1$ na $\mathbb{R}$; $y_1^1(x) = \operatorname{sgn} x \cdot \sqrt{1 - e^{-x^2}}$ na $\mathbb{R}$, $y_1^2(x) = -\operatorname{sgn} x \cdot \sqrt{1 - e^{-x^2}}$ na $\mathbb{R}$; $y_c^1(x) = \sqrt{1 - ce^{-x^2}}$, $x \in (\sqrt{\log c}, +\infty)$, $y_c^2(x) = -\sqrt{1 - ce^{-x^2}}$, $x \in (\sqrt{\log c}, +\infty)$, $y_c^3(x) = \sqrt{1 - ce^{-x^2}}$, $x \in (-\infty, -\sqrt{\log c})$, $y_c^4(x) = -\sqrt{1 - ce^{-x^2}}$, $x \in (-\infty, -\sqrt{\log c})$ pro $c > 1$; $y_c^1(x) = \sqrt{1 - ce^{-x^2}}$ na $\mathbb{R}$ a $y_c^2(x) = -\sqrt{1 - ce^{-x^2}}$ na $\mathbb{R}$ pro $c < 0$ a $c \in (0, 1)$. (b) Takové řešení neexistuje. **3.** (a) $y_0^1 = 0$ na $(0, +\infty)$, $y_0^1 = 0$ na $(-\infty, 0)$; další řešení dána vzorečkem $y_c^j(x) = \frac{x}{1-cx}$, $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $j = 1, 2, 3$ definována na intervalech: pro $c > 0$ y_c^1 na $(-\infty, 0)$, y_c^2 na $(0, \frac{1}{c})$, y_c^3 na $(\frac{1}{c}, +\infty)$; pro $c < 0$ y_c^1 na $(-\infty, \frac{1}{c})$, y_c^2 na $(\frac{1}{c}, 0)$, y_c^3 na $(0, +\infty)$. (b) $y_{-1}^3(x) = \frac{x}{1+x}$, $x \in (0, \infty)$. (c) Omezená jsou y_0^1, y_0^2, y_c^1 pro $c > 0$, y_c^3 pro $c < 0$. **4.** (a) $y_c^1(x) = \operatorname{tg}(c - \frac{1}{2}\log(1+x^2))$, $x \in (\sqrt{\exp(-\pi + 2c) - 1}, \sqrt{\exp(\pi + 2c) - 1})$, $y_c^2(x) = \operatorname{tg}(c - \frac{1}{2}\log(1 + x^2))$, $x \in (-\sqrt{\exp(\pi + 2c) - 1}, -\sqrt{\exp(-\pi + 2c) - 1})$ pro $c \geq \frac{\pi}{2}$; $y_c(x) = \operatorname{tg}(c - \frac{1}{2}\log(1 + x^2))$, $x \in (-\sqrt{\exp(\pi + 2c) - 1}, \sqrt{\exp(\pi + 2c) - 1})$ pro $c \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. (b) $y_{\frac{\pi}{4}}(x) = \operatorname{tg}(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\log(1 + x^2))$, $x \in (-\sqrt{\exp(\frac{3}{2}\pi) - 1}, \sqrt{\exp(\frac{3}{2}\pi) - 1})$. **5.** Takové řešení neexistuje. Všechna maximální řešení jsou: $y_s = 0$ na $\mathbb{R}$; $y_{s,c} = \begin{cases} 0 & x \in (-\infty, c] \\ (\frac{3}{5}(x-c))^{\frac{5}{3}} & x \in (c, +\infty) \end{cases}$ pro $c \in \mathbb{R}$; $y_{c,s} = \begin{cases} 0 & x \in (c, +\infty] \\ (\frac{3}{5}(x-c))^{\frac{5}{3}} & x \in (-\infty, c) \end{cases}$ pro $c \in \mathbb{R}$;

$y_{c,d} = \begin{cases} (\frac{3}{5}(x-c))^{\frac{5}{3}} & x \in (-\infty, c) \\ 0 & x \in [c, d] \\ (\frac{3}{5}(x-d))^{\frac{5}{3}} & x \in (d, +\infty) \end{cases}$ pro $c, d \in \mathbb{R}$, $c \leq d$. **6.** $y_c = \log(\sin x + c)$, $x \in \mathbb{R}$, pro $c > 1$; $y_c^k = \log(\sin x + c)$, $x \in (2k\pi - \arcsin c, (2k+1)\pi + \arcsin c)$, $k \in \mathbb{Z}$, pro $c \in (-1, 1]$; $\{[x, y] \in \mathbb{R}^2 \mid y > \log(\sin x + 1) \text{ nebo } \sin x = -1\}$. **7.** $y_{a,b,k}(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg}(a(e^x - 2)^3) + k\pi & x \in [\log 2, +\infty) \\ \operatorname{arctg}(b(e^x - 2)^3) + k\pi & x \in (-\infty, \log 2) \end{cases}$ pro $a, b \in \mathbb{R}$ a $k \in \mathbb{Z}$. Hledanou množinou je interval $(-\pi, \pi)$. **8.** $y_c = \sqrt[3]{3(x - x^2 + c)}$, $x \in \mathbb{R}$, pro $c < -\frac{1}{4}$; $y_{-1/4}^{1,2} = -\sqrt[3]{3} \cdot (x - \frac{1}{2})^{\frac{2}{3}}$, $x \in (-\infty, \frac{1}{2})$; nebo $x \in (\frac{1}{2}, \infty)$; $y_c^{1,2,3} = \sqrt[3]{3(x - x^2 + c)}$, $x \in (-\infty, \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1+4c})$, nebo $x \in (\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1+4c}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1+4c})$, nebo $x \in (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1+4c}, \infty)$, pro $c > -\frac{1}{4}$. **9.** $y_0 = 1$, $x \in \mathbb{R}$; $y_\infty = 0$, $x \in \mathbb{R}$; $y_c^{1,2} = \frac{1}{1-cx}$, $x \in (-\infty, \frac{1}{c})$ nebo $x \in (\frac{1}{c}, \infty)$, pro $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. **10.** $y_c = -\log_{10}(c - 10^x)$, $x \in (-\infty, \log_{10} c)$, pro $c > 0$. **11.** $y_\infty = 0$, $x \in \mathbb{R}$; $y_c^1 = -\log(1 + e^{x-c})$, $x \in \mathbb{R}$, pro $c \in \mathbb{R}$; $y_c^2 = -\log(1 - e^{x-c})$, $x \in (-\infty, -c)$, pro $c \in \mathbb{R}$. **12.** $y_{-\frac{3}{2}\pi} = -1$, $x \in (-1, 1)$; $y_{\frac{\pi}{2}} = 1$, $x \in (-1, 1)$; $y_c = \begin{cases} x \cdot \sin c + \sqrt{1-x^2} \cdot \cos c & x \in (-1, -\sin c) \\ -1 & x \in [-\sin c, 1) \end{cases}$ pro $c \in (-\frac{3}{2}\pi, -\frac{\pi}{2})$; $y_c = \begin{cases} x \cdot \sin c + \sqrt{1-x^2} \cdot \cos c & x \in (\sin c, 1) \\ 1 & x \in [-1, \sin c) \end{cases}$, pro $c \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, $y_{-\frac{\pi}{2}} = -x$, $x \in (-1, 1)$. **13.** $y_0 = 1$, $x \in \mathbb{R}$; $y_c^k = e^{c \operatorname{tg} \frac{x}{2}}$, $x \in ((2k-1)\pi, (2k+1)\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$, pro $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Řešení rovnice s počáteční podmínkou je y_0. **14.** $y_0 = x$, $x \in \mathbb{R}$; $y_\infty^{1,2} = -\frac{1}{x}$, $x \in (-\infty, 0)$ nebo $x \in (0, \infty)$; $y_c^{1,2} = \frac{x+c}{1-cx}$, $x \in (-\infty, \frac{1}{c})$ nebo $x \in (\frac{1}{c}, \infty)$. Řešení rovnice s počáteční podmínkou je y_1^1. **15.** Pro $b = 0$: $y_c = cx$, $x \in \mathbb{R}$, pro $c \in \mathbb{R}$. Řešení rovnice s počáteční podmínkou je y_1. Pro $b \neq 0$: $y_0 = b$, $x \in \mathbb{R}$; $y_c^{1,2} = b + \frac{cx}{1+bx}$, $x \in (-\infty, -\frac{1}{b})$ nebo $x \in (-\frac{1}{b}, \infty)$. Řešení rovnice s počáteční podmínkou je y_0, pokud $b = 1$; neexistuje, pokud $b = -1$; $y^1_{\frac{1-b}{1+b}}$, pokud $b < -1$; $y^2_{\frac{1-b}{1+b}}$, pokud $b \in (-1, 1) \cup (1, \infty)$.

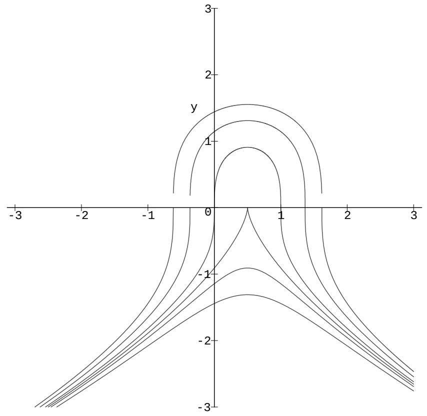
2.



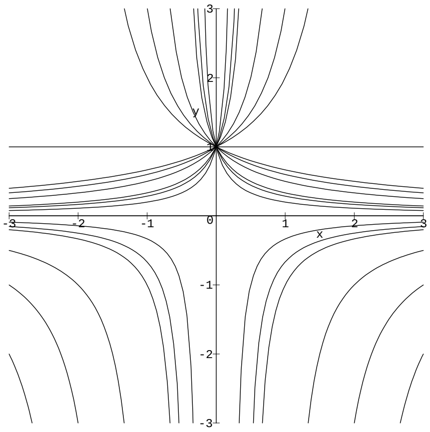
3.



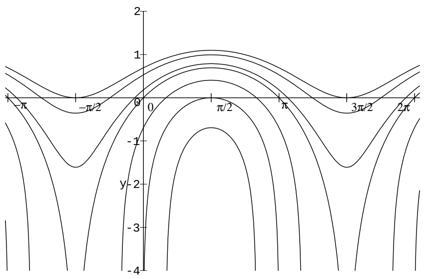
8.



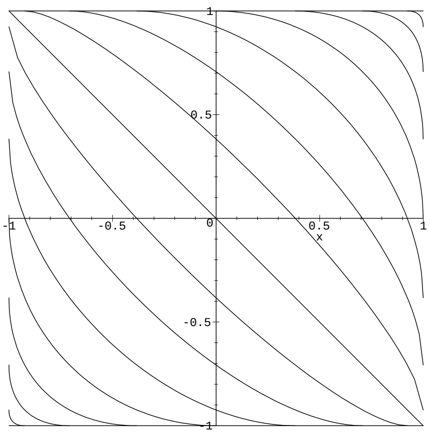
9.



6.



12.



III. Některé typy diferenciálních rovnic, které lze převést na rovnice se separovanými proměnnými

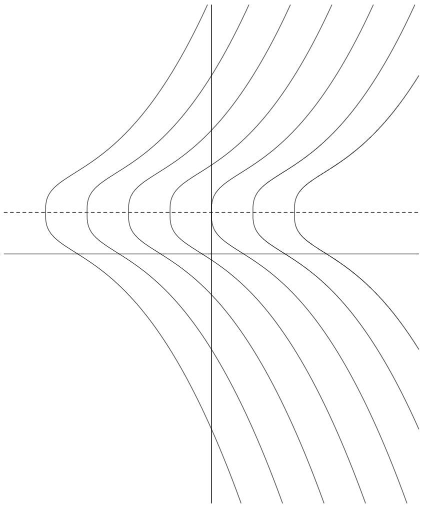
1. $y' = \cos(x-y)$ **2.** $y' = \sin(x+y)$ **3.** $y' = \frac{y^2}{x^2} - 2$ **4.** $y' = \frac{y}{x} + \frac{x}{y}$ **5.** $xy' = y \log \frac{y}{x}$
6. $y' = e^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}$ **7.** $y^2 + x^2 y' = xyy'$ **8.** $xy' - y = \sqrt{y^2+x^2}$ **9.** $y' = \frac{2y-x-5}{2x-y+4}$ **10.** $y' = \frac{2x-y+1}{x-2y+1}$
11. $y' = \frac{2(y+2)^2}{(x+y-1)^2}$ **12.** $y' = \frac{y^2-x}{2y(x+1)}$

Výsledky a návody. **1.** Substituce $y = x - z$; řešení $y(x) = x - 2k\pi$, $x \in \mathbf{R}$ ($k \in \mathbf{Z}$); $y(x) = x - 2\operatorname{arccotg}(-x-c) - 2k\pi$, $x \in \mathbf{R}$ ($k \in \mathbf{Z}$, $c \in \mathbf{R}$). **2.** Substituce $y = z - x$; řešení $y(x) = -x - \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $x \in \mathbf{R}$ ($k \in \mathbf{Z}$), $y(x) = \begin{cases} -x - 2\operatorname{arctg}(1 + \frac{2}{x+c}) + 2k\pi & x \in (-\infty, c) \\ -x - \pi + 2k\pi & x = -c \\ -x - 2\operatorname{arctg}(1 + \frac{2}{x+c}) - \pi + 2k\pi & x \in (-c, \infty) \end{cases}$
($c \in \mathbf{R}$, $k \in \mathbf{Z}$). V příkladech **3.-8.** použijte substituci $y = xz$. **3.** $y(x) = -x$, $x \in (-\infty, 0)$ nebo $x \in (0,\infty)$; $y(x) = 2x$, $x \in (-\infty, 0)$ nebo $x \in (0,\infty)$; $y(x) = x\frac{2+kx^3}{1-kx^3}$ na intervalech $(-\infty, 0)$, $(0, \frac{1}{\sqrt[3]{k}})$, $(\frac{1}{\sqrt[3]{k}}, \infty)$ pro $k > 0$ a na intervalech $(-\infty, \frac{1}{\sqrt[3]{k}})$, $(\frac{1}{\sqrt[3]{k}}, 0)$ nebo $(0,\infty)$ pro $k < 0$. **4.** $y(x) = 2x\sqrt{\log|x| + c}$ na $(-\infty, -e^{-c})$ nebo (e^{-c}, ∞); $y(x) = -2x\sqrt{\log|x| + c}$ na $(-\infty, -e^{-c})$ nebo (e^{-c}, ∞). **5.** $y(x) = ex$, $x \in (-\infty, 0)$ nebo $x \in (0,\infty)$; $y(x) = xe^{1+kx}$, $x \in (-\infty, 0)$ nebo $x \in (0,\infty)$ ($k \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$). **6.** $y(x) = -x\log(-\log|x| - c)$, $x \in (-e^{-c}, 0)$ nebo $x \in (0, e^{-c})$ ($c \in \mathbf{R}$). **7.** $y(x) = 0$, $x \in \mathbf{R}$; $y(x) = kx^2$, $x \in (-\infty, \frac{1}{k})$ nebo $x \in (\frac{1}{k}, +\infty)$ ($k \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$). **8.** $y(x) = \frac{k}{2}x^2 - \frac{1}{2k}$, $x \in (0,\infty)$ ($k > 0$); $y(x) = \frac{k}{2} - \frac{1}{2k}x^2$, $x \in (-\infty, 0)$ ($k > 0$). **9.-11.** substitucí $x = t + a$, $y = z + b$ pro vhodná a, b převést na předchozí typ. **12.** substitucí $y^2 = z$ převést na předchozí typ.

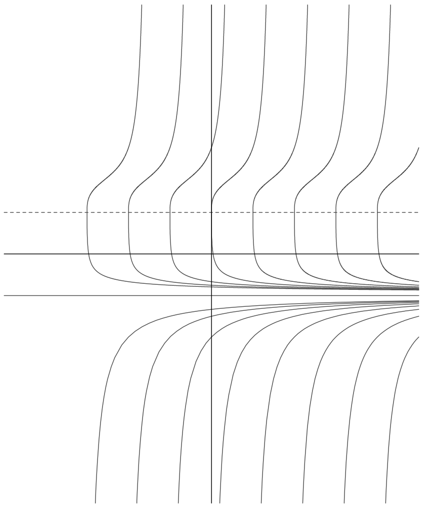
IV. Načrtněte graf řešení, aniž explicitně vyřešíte rovnici

1. $y' = \frac{y^2+1}{y-1}$ **2.** $y' = \frac{y^3+1}{y-1}$ **3.** $y' = \frac{1}{y}\sqrt{1-y^2}$ **4.** $y' = (y+1)(y+2)(y+3)$
5. $y' = (y-1)^2\sqrt[3]{y-2}(y-3)$ **6.** $y' = \sqrt[3]{\sin y}$ **7.** $y' = \sqrt{|\cos y|}$ **8.** $y' = \sin^2 y$
9. $y' = \cos y \cdot \sqrt{\sin y}$ **10.** $y' = \sqrt{e^{|y|} - 1} \cdot e^y \cdot (y-1)$ **11.** $y' = \log(1 - \sqrt[3]{y}) \cdot \frac{y+1}{y+2}$
12. $y' = \frac{\sqrt[3]{\operatorname{arctg} y} \cdot (\frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg} y)}{\operatorname{arctg}(y+1)}$

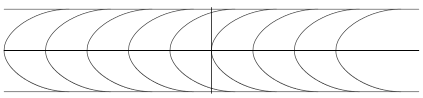
1.



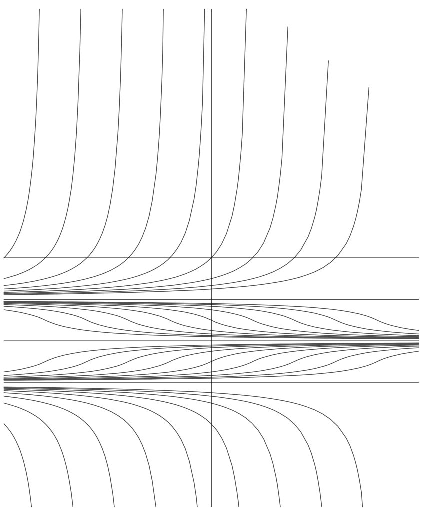
2.



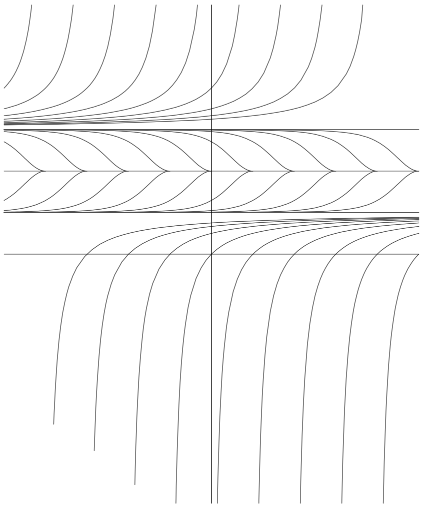
3.



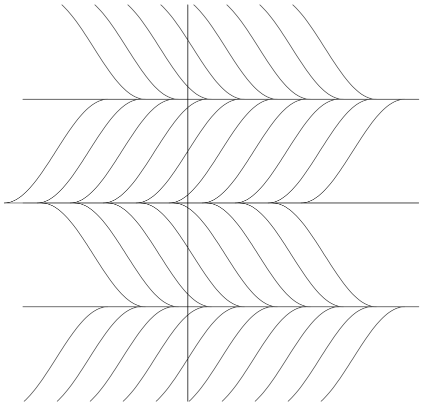
4.



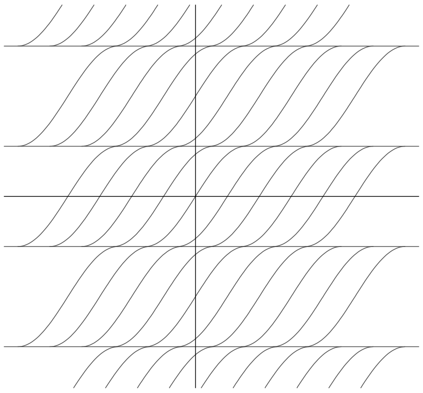
5.



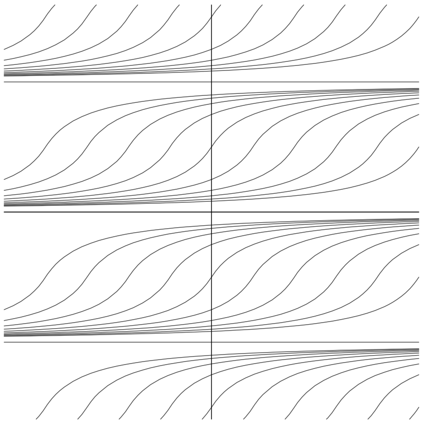
6.



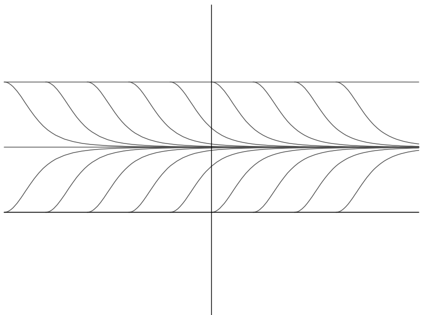
7.



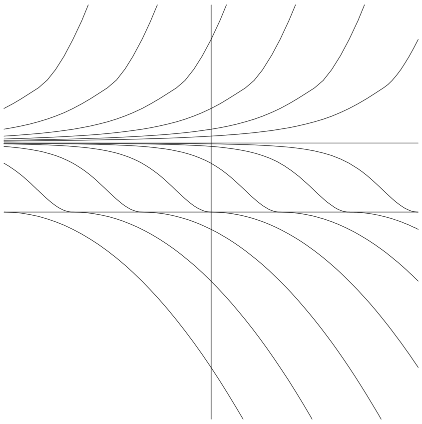
8.



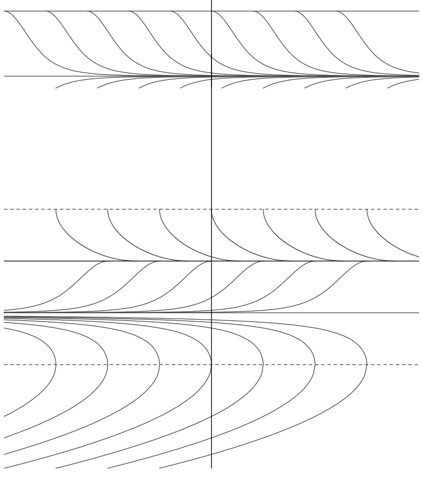
9.



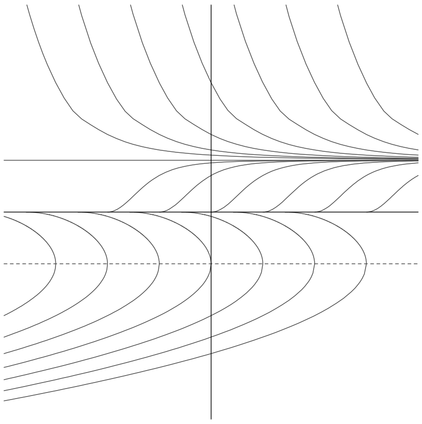
10.



11.



12.



Na obrázcích jsou naznačeny definiční obory a monotonie řešení. Výsledky analýzy jsou zde:

1. Řešení s hodnotami v $(-\infty,1)$ jsou klesající a definovaná na intervalech typu $(T,+\infty)$, před dosažením hodnoty $1-\sqrt{2}$ jsou ryze konvexní, po jejím dosažení ryze konkávní. Řešení s hodnotami v $(1,+\infty)$ jsou rostoucí a definovaná na intervalech typu $(T,+\infty)$, před dosažením hodnoty $1+\sqrt{2}$ jsou ryze konkávní, po jejím dosažení ryze konvexní. [Další výsledky uvádíme stručněji.] **2.** Stacionární řešení -1. $(-\infty,-1)$: rostoucí, ryze konkávní, $(T,+\infty)$; $(-1,1)$: klesající, ryze konvexní, $(T,+\infty)$; $(1,+\infty)$: rostoucí, ryze konkávní do dosažení y_0, pak ryze konvexní, kde y_0 je jediný reálný kořen polynomu $2t^3-3t^2-1$, (T_1,T_2). **3.** Stacionární řešení -1, 1. $(-1,0)$: klesající, ryze konvexní, (T_1,T_2), lze nalepit s.ř. -1; $(0,1)$: rostoucí, ryze konvexní, (T_1,T_2), lze nalepit s.ř. 1. **4.** Stacionární řešení -1, -2, -3. $(-\infty,-3)$: klesající, ryze konkávní, $(-\infty,T)$; $(-3,-2)$: rostoucí, ryze konvexní do dosažení $-2-\frac{1}{\sqrt{3}}$, pak ryze konkávní, $\mathbb{R}$; $(-2,-1)$: klesající, ryze konkávní do dosažení $-2+\frac{1}{\sqrt{3}}$, pak ryze konvexní, $\mathbb{R}$; $(-1,+\infty)$: rostoucí, ryze konvexní, $(-\infty,T)$. **5.** Stacionární řešení 1, 2, 3. $(-\infty,1)$: rostoucí, ryze konkávní, $(T,+\infty)$; $(1,2)$: rostoucí, ryze konvexní do dosažení $\frac{5}{2}$, pak ryze konkávní, $(-\infty,T)$, lze nalepit s.ř. 2; $(2,3)$: klesající, ryze konkávní do dosažení $\frac{9}{5}$, pak ryze konvexní, $(-\infty,T)$, lze nalepit s.ř. 2; $(3,+\infty)$: rostoucí, ryze konvexní, $(-\infty,T)$. **6.** Stacionární řešení $k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$. $(k\pi,(k+1)\pi)$, k sudé: rostoucí, ryze konvexní do dosažení $\frac{\pi}{2}+k\pi$, pak ryze konkávní, (T_1,T_2), lze nalepit s.ř. $k\pi$ i $(k+1)\pi$; $(k\pi,(k+1)\pi)$, k liché: klesající, ryze konkávní do dosažení $\frac{\pi}{2}+k\pi$, pak ryze konvexní, (T_1,T_2), lze nalepit s.ř. $k\pi$ i $(k+1)\pi$. **7.** Stacionární řešení $\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$. $(-\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi)$: rostoucí, ryze konvexní do dosažení $k\pi$, pak ryze konkávní, (T_1,T_2), lze nalepit s.ř. $-\frac{\pi}{2}+k\pi$ i $\frac{\pi}{2}+k\pi$. (V tomto příkladu je mnoho možností lepení, protože na každé stacionární řešení lze navázat z obou stran.) **8.** Stacionární řešení $k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$. $(k\pi,(k+1)\pi)$: rostoucí, ryze konvexní do dosažení $\frac{\pi}{2}+k\pi$, pak ryze konkávní, $\mathbb{R}$. **9.** Stacionární řešení $k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$, a $\frac{\pi}{2}+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$. $(2k\pi,\frac{\pi}{2}+2k\pi)$: rostoucí, ryze konvexní do dosažení $\arccos\frac{\sqrt{6}}{3}$, pak ryze konkávní, $(T,+\infty)$, lze nalepit s.ř. $2k\pi$; $(\frac{\pi}{2}+2k\pi,(2k+1)\pi)$: klesající, ryze konkávní do dosažení $\pi-\arccos\frac{\sqrt{6}}{3}$, pak ryze konvexní, $(T,+\infty)$, lze nalepit s.ř. $(2k+1)\pi$. **10.** Stacionární řešení 0, 1. $(-\infty,0)$: klesající, ryze konkávní do dosažení y_0, pak ryze konvexní, $(T,+\infty)$, lze nalepit s.ř. 0; $(0,1)$: rostoucí, ryze konvexní do dosažení y_1, pak ryze konkávní, $(T,+\infty)$, lze nalepit s.ř. 0; $(1,+\infty)$: klesající, ryze konvexní, $(T,+\infty)$. (Hodnoty y_0 a y_1 jsou řešení jistých rovnic, nelze je vyjádřit explicitně, lze však ukázat, že existují a jsou jednoznačně určena.) **11.** Stacionární řešení 0, -1. $(-\infty,-2)$: rostoucí, $(-\infty,T)$; $(-2,-1)$: klesající, $(-\infty,T)$; $(-1,0)$: rostoucí, $(-\infty,T)$, lze nalepit s.ř. 0; $(0,1)$: klesající, (T_1,T_2), lze nalepit s.ř. 0. (Zkoumání konvexity a konkávnosti je těžší.) **12.** Stacionární řešení: 0, 1. $(-\infty,-1)$: rostoucí, $(-\infty,T)$; $(-1,0)$: klesající, (T_1,T_2), lze nalepit s.ř. 0; $(0,1)$: rostoucí, $(T,+\infty)$, lze nalepit s.ř. 0; $(1,+\infty)$: klesající, $\mathbb{R}$. (Zkoumání konvexity a konkávnosti je těžší.)

==

V. Lineární rovnice prvního řádu

1. $y'=\frac{2y}{x}$ **2.** $y'-\frac{2}{x}y=2x^3$ **3.** $y'=\frac{y}{x}-1$ **4.** $y'x=y+x^2$ **5.** $y'+\frac{2y}{x}=\frac{e^{-x^2}}{x}$
6. $y'\cos x-y\sin x=\sin 2x$ **7.** $xy'+y=\log x+1$ **8.** $(a^2+x^2)y'+xy=1$ $(a\in\mathbf{R})$
9. $(2x+1)y'+y=x$ **10.** $y'-y\operatorname{tg}x=\operatorname{cotg}x$ **11.** $y'+y\cos x=\sin 2x$ **12.** $y'+\frac{x+1}{x}y=3xe^{-x}$

Výsledky a návody. **1.** $y = cx^2$, $x \in (-\infty, 0)$ nebo $x \in (0, \infty)$, $c \in \mathbf{R}$. **2.** $y = x^4 + cx^2$, $x \in (-\infty, 0)$ nebo $x \in (0, \infty)$, $c \in \mathbf{R}$. **3.** $y = -x \log |x| + cx$, $x \in (-\infty, 0)$ nebo $x \in (0, \infty)$, $c \in \mathbf{R}$. **4.** $y = x^2 + cx$, $x \in \mathbf{R}$, $c \in \mathbf{R}$. **5.** $y = -\frac{1}{2x^2} e^{-x^2} + \frac{c}{2x^2}$, $x \in (-\infty, 0)$ nebo $x \in (0, \infty)$, $c \in \mathbf{R}$. **6.** $y = -\frac{\cos 2x}{2 \cos x} + \frac{c}{\cos x}$, $x \in (-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$, $k \in \mathbf{Z}$, $c \in \mathbf{R}$. Pro $c = -1/2$ lze lepit, tím dostaneme řešení $y(x) = -\cos x$, $x \in \mathbf{R}$. **7.** $y = \log x + \frac{c}{x}$, $x \in (0, \infty)$, $c \in \mathbf{R}$. **8.** Pro $a = 0$: $y = \frac{\log |x|}{x} + \frac{c}{x}$, $x \in (-\infty, 0)$ nebo $x \in (0, \infty)$, $c \in \mathbf{R}$; pro $a \neq 0$: $y = \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}} \left(\frac{1}{|a|} \log \frac{1+\sin \operatorname{arctg} \frac{x}{a}}{1-\sin \operatorname{arctg} \frac{x}{a}} + c \right)$, $x \in \mathbf{R}$, $c \in \mathbf{R}$. **9.** $y = \frac{1}{3}(x-1) + \frac{c}{\sqrt{|2x+1|}}$, $x \in (-\infty, -\frac{1}{2})$ nebo $x \in (-\frac{1}{2}, \infty)$, $c \in \mathbf{R}$. Pro $c = 0$ lze lepit, dostaneme řešení $y(x) = \frac{1}{3}(x-1)$, $x \in \mathbf{R}$. **10.** $y = 1 + \frac{1}{2 \cos x} \log \frac{1-\cos x}{1+\cos x} + \frac{c}{\cos x}$, $x \in (k\frac{\pi}{2}, (k+1)\frac{\pi}{2})$, $k \in \mathbf{Z}$, $c \in \mathbf{R}$. **11.** $y = 2(\sin x - 1) + ce^{-\sin x}$, $x \in \mathbf{R}$, $c \in \mathbf{R}$. **12.** $y = x^2 e^{-x} + \frac{c}{x} e^{-x}$, $x \in (-\infty, 0)$ nebo $x \in (0, \infty)$, $c \in \mathbf{R}$.

===

VI. Lineární rovnice s konstantními koeficienty

1. $y'' + 4y' + 4y = 0$ **2.** $y'' - 3y' + 2y = 0$ **3.** $y'' - 6y' + 13y = 0$ **4.** $y^{(4)} + 6y'' + 9y = 0$
5. $y'' - 2y' - 3y = e^{4x}$ **6.** $y'' - 2y' + 5y = \cos x$ **7.** $y''' + y'' = x$ **8.** $y''' - y'' - 2y' = e^{2x} + x^3 + 3x^2 + 1$
9. $y'' + 3y' + 2y = \sin x + \sin 2x$ **10.** $4y''' + y' = 3e^x + 2 \sin \frac{x}{2}$ **11.** $y'' - y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$
12. $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x^2+x+1}$ **13.** $y'' + y = \operatorname{tg} x$ **14.** $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{\sqrt{4-x^2}}$ **15.** $y'' - 3y' + 2y = \frac{e^{2x}}{\sqrt{1-e^{2x}}}$

– –

Výsledky a návody. **1.** $y = ce^{-2x} + dxe^{-2x}$, $x \in \mathbf{R}$. **2.** $y = ce^x + de^{2x}$, $x \in \mathbf{R}$. **3.** $y = e^{3x}(c \cos 2x + d \sin 2x)$, $x \in \mathbf{R}$. **4.** $y = a \cos \sqrt{3}x + b \sin \sqrt{3}x + cx \cos \sqrt{3}x + dx \sin \sqrt{3}x$, $x \in \mathbf{R}$. **5.** $y = \frac{1}{5} e^{4x} + ce^{-x} + de^{3x}$, $x \in \mathbf{R}$. **6.** $y = \frac{1}{5} \cos x - \frac{1}{10} \sin x + e^x(c \cos 2x + d \sin 2x)$, $x \in \mathbf{R}$. **7.** $y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + a + bx + ce^{-x}$, $x \in \mathbf{R}$. **8.** $y = \frac{1}{6}xe^{2x} - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{8}x^2 - \frac{7}{8}x + a + be^{-x} + ce^{2x}$, $x \in \mathbf{R}$. **9.** $y = -\frac{1}{20} \sin 2x - \frac{3}{20} \cos 2x - \frac{3}{10} \cos x + \frac{1}{10} \sin x + ce^{-x} + de^{-2x}$, $x \in \mathbf{R}$. **10.** $y = \frac{3}{5} e^x - x \sin \frac{x}{2} + a + b \cos \frac{x}{2} + c \sin \frac{x}{2}$, $x \in \mathbf{R}$. **11.** $y = e^x(1 + e^{2x}) \operatorname{arctg} e^x + ce^x + de^{-x}$, $x \in \mathbf{R}$. **12.** $y = e^x \cdot \left(c + dx - \frac{1}{2} \log(x^2 + x + 1) + \frac{2x+1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} \right)$, $x \in \mathbf{R}$. **13.** $y = -\cos x \log \frac{1+\sin x}{|\cos x|} + c \cos x + d \sin x$, $x \in (-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$, $k \in \mathbf{Z}$. **14.** $y = e^x \cdot \left(c + dx + \sqrt{4 - x^2} + x \arcsin \frac{x}{2} \right)$, $x \in (-2, 2)$. **15.** $y = -e^x \arcsin e^x - \frac{1}{2} e^{2x} \log \frac{1-\sqrt{1-e^{2x}}}{1+\sqrt{1-e^{2x}}} + ce^x + de^{2x}$, $x \in (-\infty, 0)$.

===

Soustavy lineárních rovnic s konstantními koeficienty – metody řešení

Uvažujme soustavu $\boldsymbol{y}' = \mathbb{A}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{b}(t)$, kde $\mathbb{A} \in M(n \times n)$, $\boldsymbol{b}\colon (\alpha, \beta) \to \mathbf{R}^n$ je spojitá vektorová funkce a $\boldsymbol{y}$ je neznámá vektorová funkce.

(1) Jde o lineární rovnici. Můžeme řešit zvlášť homogenní rovnici (tj. $\boldsymbol{y}' = \mathbb{A}\boldsymbol{y}$) a pak hledat partikulární řešení. Řešení homogenní rovnice jsou definována na $\mathbf{R}$ a tvoří vektorový prostor dimenze n.

(2) Řešení homogenní rovnice:
  (i) Napíšeme si matici $\lambda\mathbb{I} - \mathbb{A}$ a tu řádkovými úpravami převedeme na horní trojúhelníkovou matici. Řádkové úpravy jsou:
    (a) prohození dvou řádků;
    (b) vynásobení řádku nenulovou konstantou;
    (c) přičtení $P(\lambda)$-násobku jednoho řádku k jinému řádku, kde $P(\lambda)$ je polynom v proměnné λ.

(ii) Vzniklou matici přepíšeme opět na soustavu diferenciálních rovnic následovně: Má-li matice tvar

$$\begin{pmatrix} P_{11}(\lambda) & P_{12}(\lambda) & \dots & P_{1n}(\lambda) \\ 0 & P_{22}(\lambda) & \dots & P_{2n}(\lambda) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & P_{nn}(\lambda) \end{pmatrix},$$

pak nová soustava bude mít tvar

$$\begin{array}{lllll} P_{11}(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x})y_1 & +P_{12}(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x})y_2 & + & \dots & +P_{1n}(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x})y_n & =0 \\ & P_{22}(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x})y_2 & + & \dots & +P_{2n}(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x})y_n & =0 \\ & & & \vdots & & \\ & & & & P_{nn}(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x})y_n & =0, \end{array}$$

kde symbolem $P(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x})y$ rozumíme funkci $a_k y^{(k)} + a_{k-1}y^{(k-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y$, pokud $P(\lambda) = a_k\lambda^k + a_{k-1}\lambda^{k-1} + \dots + a_1\lambda + a_0$.

(iii) Novou soustavu vyřešíme odzadu (tedy od n-té rovnice po první). Přitom používáme metodu řešení lineárních rovnic s konstantními koeficienty – hledání fundamentálního systému a řešení rovnic se speciální pravou stranou.

(3) Pro hledání partikulárního řešení máme následující možnosti:

- Variace konstant: Nechť $\Phi(t)$ je fundamentální matice, tj. její sloupce jsou prvky fundamentálního systému řešení homogenní rovnice. Pak partikulární řešení najdeme ve tvaru $\boldsymbol{y}_p(t) = \Phi(t)\boldsymbol{c}(t)$ pro vhodnou vektorovou funkci $\boldsymbol{c}$.
- Je-li vektorová funkce $\boldsymbol{b}$ dostatečně hladká (např. třídy C^∞), lze použít eliminaci pro nehomogenní rovnici: K matici $\lambda\mathbb{I} - \mathbb{A}$ přidáme ještě sloupec pravých stran a upravujeme takto rozšířenou matici $(\lambda\mathbb{I} - \mathbb{A}|\boldsymbol{b}(t))$ typu $n \times (n+1)$. Řádkovými úpravami dojdeme k matici tvaru

$$\begin{pmatrix} P_{11}(\lambda) & P_{12}(\lambda) & \dots & P_{1n}(\lambda) & f_1(x,\lambda) \\ 0 & P_{22}(\lambda) & \dots & P_{2n}(\lambda) & f_2(x,\lambda) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & P_{nn}(\lambda) & f_n(x,\lambda) \end{pmatrix}.$$

Tuto matici přepíšeme opět jako soustavu diferenciálních rovnic. Levé strany budou mít stejný tvar jako v případě homogenní soustavy. Funkce $f_j(x,\lambda)$ v posledním sloupci upravené matice mají tvar

$$f_j(x,\lambda) = \sum_{i=1}^{k} \lambda^i g_{ji}(x),$$

kde funkce g_{ji} jsou nějaké funkce třídy C^∞. Nová soustava pak bude mít tvar

$$\begin{array}{llllll} P_{11}(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x})y_1 & +P_{12}(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x})y_2 & + & \dots & +P_{1n}(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x})y_n & =\tilde{f}_1(x) \\ & P_{22}(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x})y_2 & + & \dots & +P_{2n}(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x})y_n & =\tilde{f}_2(x) \\ & & & \vdots & & \\ & & & & P_{nn}(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x})y_n & =\tilde{f}_n(x), \end{array}$$

kde $\tilde{f}_j(x) = \sum_{i=1}^{k} g_{ji}{}^{(i)}(x)$.

VII. Soustavy lineárních diferenciálních rovnic

1. $z' + y = 0$, $z' - y' = 3z + y$ **2.** $z' = -z + y + e^x$, $y' = z - y + e^x$ **3.** $5z' - 2y' + 4z - y = e^{-x}$, $z' + 8z - 3y = 5e^{-x}$ **4.** $z' + 3z + y = 0$, $y' - z + y = 0$, $y(0) = z(0) = 1$ **5.** $z' = y - 7z$, $y' + 2z + 5y = 0$ **6.** $z' = 2y - 5z + e^x$, $y' = z - 6y + e^{-2x}$ **7.** $z'' + y' + z = e^x$, $z' + y'' = 1$ **8.** $u' = w + v - u$, $v' = w + u - v$, $w' = u + v + w$, $(u(0) = 1$, $v(0) = w(0) = 0)$ **9.** $u' = v + w$, $v' = u + w$, $w' = u + v$, $(u(0) = -1$, $v(0) = 1$, $w(0) = 0)$

Řešte soustavy $y' = Ay + b(x)$, kde

10. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $b(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \end{pmatrix}$. **11.** $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -15 \\ 1 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & -6 \end{pmatrix}$, $b(x) = \begin{pmatrix} e^x \\ e^x \\ e^x \end{pmatrix}$. **12.** $A = \begin{pmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{pmatrix}$

13. $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, $b(x) = \begin{pmatrix} \sin x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. **14.** $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ **15.** $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -6 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 8 \end{pmatrix}$

16. $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & -3 \\ 4 & -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ **17.** $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -7 \\ 9 & -3 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}$ **18.** $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Výsledky a návody. **1.** $z = ae^x + be^{-3x}$, $y = -ae^x + 3be^{-3x}$ **2.** $z = e^x + de^{-2x} + c$, $y = e^x - de^{-2x} + c$ **3.** $z = -2e^{-x} + ce^x + de^{-2x}$, $y = 3e^{-x} + 3ce^x + 2de^{-2x}$ **4.** $z = -(c+d)xe^{-2x} + de^{-2x}$, $y = (c+d)xe^{-2x} + ce^{-2x}$, s poč. podm. : $z = -2xe^{-2x} + e^{-2x}$, $y = 2xe^{-2x} + e^{-2x}$ **5.** $z = (c-d)e^{-6x}\sin x + de^{-6x}\cos x$, $y = ce^{-6x}\cos x + (c-2d)e^{-6x}\sin x$ **6.** $z = \frac{7}{40}e^x + \frac{1}{5}e^{-2x} + 2ae^{-4x} + be^{-7x}$, $y = \frac{1}{40}e^x + \frac{3}{10}e^{-2x} + ae^{-4x} - be^{-7x}$ **7.** $z(x) = e^x - \frac{1}{6}x^3 - \frac{b+c}{2}x^2 + c + dx$, $y = -e^x + \frac{1}{24}x^4 + a + bx + \frac{b+c}{6}x^3 + \frac{d}{2}x^2$ **8.** $u = ae^{-x} + be^{2x} + ce^{-2x}$, $v = ae^{-x} + be^{2x} - ce^{-2x}$, $w = -ae^{-x} + 2be^{2x}$, s poč.podm. $u = \frac{1}{3}e^{-x} + \frac{1}{6}e^{2x} + \frac{1}{2}e^{-2x}$, $v = \frac{1}{3}e^{-x} + \frac{1}{6}e^{2x} - \frac{1}{2}e^{-2x}$, $w = -\frac{1}{3}e^{-x} + \frac{1}{3}e^{2x}$ **9.** $u = ae^{2x} + be^{-x}$, $v = ae^{2x} + ce^{-x}$, $w = ae^{2x} - (b+c)e^{-x}$ s poč. podm. $u = -e^{-x}$, $v = e^{-x}$, $w = 0$ **10.** $y = (\frac{x-3}{4} + e^{2x}(bx + c), -\frac{3}{4} + e^{2x}(2bx + b + 2c), -\frac{2x^2+x+2}{4} + e^{2x}(bx + a + c))$, $a, b, c \in \mathbb{R}$. **11.** $y = (e^{-x}(-1 + 6c + 6bx), e^{-x}(15a + 2bx + b + 2c), e^{-x}(a + 2bx + 2c))$, $a, b, c \in \mathbb{R}$. **12.** $y = (6be^{-x} + 6ce^x, 10ae^{-x} + (3a + 9c)e^x, 3be^{-x} + (6a + 3c)e^x)$, $a, b, c \in \mathbb{R}$. **13.** $y = (-\frac{1}{10}\cos x - \frac{3}{10}\sin x - 2a \cdot e^{3x}, \frac{73}{500}\cos x + \frac{89}{500}\sin x + e^{3x} \cdot (ax^2 + bx + c), -\frac{43}{500}\cos x - \frac{49}{500}\sin x + e^{3x} \cdot (-ax^2 - (2a+b)x - 4a - b - c)$, $a, b, c \in \mathbb{R}$. **14.** $y = ((a+3b)e^x \sin x + (3a-b)e^x \cos x, (2a+b)e^x \sin x + (a-2b)e^x \cos x + ce^{4x}, (2b-a)e^x \sin x + (2a+b)e^x \cos x + ce^{4x})$,$a, b, c \in \mathbb{R}$. **15.** $y = (e^x(bx^2 + cx + d), e^x(\frac{1}{3}bx^2 - \frac{1}{3}(4b-c)x - \frac{2}{9}b - \frac{2}{3}c + \frac{1}{3}d, e^x(a + bx^2 + cx + d), e^x(\frac{1}{3}bx^2 - \frac{1}{3}(2b-c)x - \frac{2}{9}b - \frac{1}{3}c + \frac{1}{3}d)$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. **16.** $y = (e^{2x}(cx + d), e^{2x}(cx - c + d), e^{2x}(ax + b), e^{2x}((a+c)x - \frac{1}{3}a + b + d)$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. **17.** $y = (cx + d, (3c - \frac{5}{2}a)x + \frac{7}{8}a - \frac{5}{2}b - c + 3d, ax + b, \frac{1}{2}ax - \frac{1}{8}a + \frac{1}{2}b)$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. **18.** $y = (e^x(a\cos x + b\sin x) + c\cos x + d\sin x, \frac{1}{2}e^x((a+b)\cos x + (b-a)\sin x) + c\cos x + d\sin x, e^x(a\cos x + b\sin x) + (c-d)\cos x + (c+d)\sin x, e^x(a\cos x + b\sin x))$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

VIII. Stabilita stacionárních řešení autonomních soustav

A. Lineární soustavy $y' = \mathbb{A}y$, kde $\mathbb{A} \in M(n \times n)$

Konstantní nulová funkce $\mathbf{o}$ je vždy stacionární řešení. Pro jeho stabilitu platí:

(1) $\mathbf{o}$ je asymptoticky stabilní řešení soustavy $y' = \mathbb{A}y$, právě když pro každé vlastní číslo λ matice $\mathbb{A}$ platí $\operatorname{Re}\lambda < 0$.

(2) $\mathbf{o}$ je stabilní řešení soustavy $y' = \mathbb{A}y$ právě když pro každé vlastní číslo λ matice $\mathbb{A}$ platí buď $\operatorname{Re}\lambda < 0$ nebo $\operatorname{Re}\lambda = 0$ a přitom násobnost vlastního čísla λ je rovna $n - h(\lambda I - \mathbb{A})$.

(3) $\mathbf{o}$ je nestabilní řešení soustavy $y' = \mathbb{A}y$ právě když neplatí podmínka v bodu (2), tj. existuje vlastní číslo λ matice $\mathbb{A}$, pro které buď $\operatorname{Re}\lambda > 0$ nebo $\operatorname{Re}\lambda = 0$ a přitom násobnost vlastního čísla λ je větší než $n - h(\lambda I - \mathbb{A})$.

Poznámky: • Pokud $\operatorname{Re}\lambda = 0$ a λ je vlastní číslo násobnosti 1, je podmínka s hodností z bodu (2) splněna automaticky.

• Je-li 0 vlastním číslem matice $\mathbb{A}$, má soustava více stacionárních řešení, přičemž všechna mají tytéž vlastnosti, co se týče stability.

Pro následující matice $\mathbb{A}$ rozhodněte, zda $\mathbf{o}$ je asymptoticky stabilní, stabilní nebo nestabilní řešení soustavy $y' = \mathbb{A}y$.

1. $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ **2.** $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & -6 \end{pmatrix}$ **3.** $\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ **4.** $\begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ -4 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

B. Linearizace nelineárních soustav

Nechť $y' = g(y)$ je autonomní soustava, přičemž g je třídy C^1. Nechť $\mathbf{a}$ je stacionární bod (tj. $g(\mathbf{a}) = 0$, funkce konstatně rovna $\mathbf{a}$ je řešením). Nechť $\mathbb{A} = \nabla g(\mathbf{a})$ je Jacobiho matice g v bodě $\mathbf{a}$. Pak platí:

(1) Pokud každé vlastní číslo λ matice $\mathbb{A}$ splňuje $\operatorname{Re}\lambda < 0$, pak je stacionární řešení $\mathbf{a}$ asymptoticky stabilní.

(2) Pokud pro nějaké vlastní číslo λ matice $\mathbb{A}$ platí $\operatorname{Re}\lambda > 0$, pak je stacionární řešení $\mathbf{a}$ nestabilní.

(3) V ostatních případech nelze rozhodnout jen na základě matice $\mathbb{A}$ a jsou potřeba pokročilejší metody.

Pro následující soustavy najděte stacionární řešení a rozhodněte o jejich stabilitě (případné parametry jsou nenulové)

5. $z' = z - z^2 - 2zy$, $y' = 2y - 2y^2 - 3zy$. **6.** $z' = -\beta zy + \mu$, $y' = \beta zy - \gamma y$. **7.** $u' = au - buv$, $v' = -cv + duv$, $w' = w + u^2 + v^2$. **8.** $u' = -u - uv^2$, $v' = -v - u^2 v$, $w' = 1 - w + u^2$.
9. $y' = \sin(yz) - \frac{1}{2}$, $z' = -yz - z$. **10.** $u' = 2uvw$, $v' = -u - 2w^2 + 8$, $w' = w^2 - v^2$.
11. $u' = 1 - u^2 - v^2$, $v' = w^2 - u - v$, $w' = w^2 - 1$.
12. $u' = uv - 2u - v + 2$, $v' = uv + vw + uw$, $w' = 2u(w + 1)$.

– –

Výsledky a návody. **1.** nestabilní (vlastní čísla $-2, -1, 2$ násobnosti 1) **2.** stabilní, ale ne asymptoticky stabilní (vlastní čísla -8 násobnosti 1, 0 násobnosti 2, přitom $h(A) = 1$) **3.** stabilní, ale ne asymptoticky stabilní (vlastní čísla $-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{11}}{2}i$, 0, všechna násobnosti 1). **4.** nestabilní (vlastní číslo 0 násobnosti 3, ale hodnost A je 2). **5.** $[0,0]$ nestabilní; $[3,-5]$ nestabilní; $[\frac{1}{2}, 0]$ – o stabilitě z uvedených vět nelze rozhodnout. **6.** $[\frac{\mu}{\gamma}, \frac{\gamma}{\beta}]$ – asymptoticky stabilní, pokud $\gamma > 0$ a $\beta\mu < 0$, jinak je nestabilní. **7.** $[0,0,0]$, $[\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, -\frac{a^2}{b^2} - \frac{c^2}{d^2}]$, oba nestabilní (jedno z vlastních čísel je vždy 1). **8.** $[0,0,1]$, asymptoticky stabilní. **9.** $[-1, 2k\pi - \frac{\pi}{6}]$, $[-1, 2k\pi - \frac{5}{6}\pi]$, $k \in \mathbf{Z}$; pro $k < 0$ asymptoticky stabilní, pro $k \geq 0$ nestabilní. **10.** $[8,0,0]$, $[0, \pm 2, \pm 2]$ (všechny čyři možnosti); o stabilitě bodu $[8,0,0]$ nelze z uvedených vět rozhodnout, bod $[0,2,-2]$ je asymptoticky stabilní, ostatní body jsou nestabilní. **11.** $[0,1,1]$, $[1,0,1]$, $[0,1,-1]$, $[1,0,-1]$; bod $[1,0,-1]$ je asymptoticky stabilní, ostatní jsou nestabilní. **12.** $[0,2,0]$, $[2,2,-1]$, oba nestabilní.