

VI.3 Spektrální rozklad (neomezeného) samoadjungovaného operátoru

Tvrzení 14 (měřitelný kalkulus jako integrál). *Nechť $T \in L(H)$ je normální operátor. Nechť E_T je jeho spektrální míra a \mathcal{A}_T je σ -algebra, na níž je definovaná. Je-li g omezená \mathcal{A}_T -měřitelná funkce, pak $\tilde{g}(T) = \int g \, dE_T$.*

Lemma 15. *Nechť T je samoadjungovaný operátor na H . Nechť E je spektrální míra operátoru C_T . Pak*

$$T = \int i \frac{1+z}{1-z} \, dE(z).$$

Lemma 16 (o obrazu spektrální míry). *Nechť F je abstraktní spektrální míra v H definovaná na σ -algebře \mathcal{A} a $\varphi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ je \mathcal{A} -měřitelné zobrazení. Označme*

$$\mathcal{A}' = \{A \subset \mathbb{C} : \varphi^{-1}(A) \in \mathcal{A}\}$$

a pro $A \in \mathcal{A}'$ položme

$$E(A) = F(\varphi^{-1}(A)).$$

Pak E je abstraktní spektrální míra v H a pro každou \mathcal{A}' -měřitelnou funkci f platí

$$\int f \, dE = \int f \circ \varphi \, dF.$$

Věta 17 (spektrální rozklad samoadjungovaného operátoru). *Je-li T samoadjungovaný operátor na Hilbertově prostoru H , pak existuje jediná abstraktní spektrální míra E v H taková, že $T = \int \text{id} \, dE$.*

Tato míra E je obrazem spektrální míry operátoru C_T při borelovském zobrazení $z \mapsto i \frac{1+z}{1-z}$.

Důsledek 18. *Nechť T je samoadjungovaný operátor na H . Pak T je omezený, právě když $\sigma(T)$ je omezená množina.*