I.3. **Holomorfní kalkulus.**

Nechť A je Banachova algebra s jednotkou e, $x \in A$ a f buď funkce holomorfní na otevřené množině $\Omega \subset \mathbb{C}$, která obsahuje $\sigma(x)$. Nechť Γ je "cyklus obíhající $\sigma(x)$ v Ω jedenkrát v kladném smyslu"(tj. Γ je cyklus v Ω, $\operatorname{ind}_\Gamma z$ nabývá jen hodnot 0 nebo 1, přičemž pro $z \in \sigma(x)$ je $\operatorname{ind}_\Gamma z = 1$ a pro $z \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ je $\operatorname{ind}_\Gamma z = 0$). Pak definujeme prvek $\tilde{f}(x) \in A$ vzorcem

$$\tilde{f}(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma (\lambda e - x)^{-1} f(\lambda)\, d\lambda,$$

tj.

$$\varphi(\tilde{f}(x)) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \varphi((\lambda e - x)^{-1}) f(\lambda)\, d\lambda, \qquad \varphi \in A^*.$$

Poznámka. Hodnota $\tilde{f}(x)$ nezávisí na volbě Γ.

Věta 12 (vlastnosti holomorfního kalkulu)**.** *Nechť A je Banachova algebra, $x \in A$ a $\Omega \subset \mathbb{C}$ je otevřená množina obsahující $\sigma(x)$.*

- *Zobrazení $f \mapsto \tilde{f}(x)$ je izomorfismus (komutativní) algebry s jednotkou $H(\Omega)$ na podalgebru algebry A.*
- *$\tilde{id}(x) = x$ a $\tilde{1}(x) = e$, kde $id(\lambda) = \lambda$ a $1(\lambda) = 1$ pro $\lambda \in \Omega$.*
- *Je-li p polynom, pak $\tilde{p}(x) = p(x)$, kde $p(x)$ má význam jako v Lemmatu 8.*
- *Je-li $\lambda \in \Omega$, pak $\tilde{f}(\lambda e) = f(\lambda)e$.*
- *Pokud $f_n \to f$ lokálně stejnoměrně na Ω (kde $f_n \in H(\Omega)$ pro každé $n \in \mathbb{N}$), pak $\tilde{f}_n(x) \to \tilde{f}(x)$ v A.*
- *$\tilde{f}(x) \in G(A)$, právě když $f(\lambda) \neq 0$ pro všechna $\lambda \in \sigma(x)$.*
- *$\sigma(\tilde{f}(x)) = f(\sigma(x))$.*
- *$\widetilde{(g \circ f)}(x) = \tilde{g}(\tilde{f}(x))$ pro $f \in H(\Omega)$, $g \in H(\Omega')$, $\Omega' \supset f(\sigma(x))$.*