I.4. **Ideály a komplexní homomorfismy.**

Definice.

- Nechť A, B jsou Banachovy algebry. Zobrazení $h : A \to B$ nazýváme **homomorfismem Banachových algeber** (krátce **homomorfismem**), pokud je lineární a navíc $h(xy) = h(x)h(y)$ pro $x, y \in A$.
- **Komplexním homomorfismem** na Banachově algebře A rozumíme homomorfismus $h : A \to \mathbb{C}$.
- Označme $\Delta(A)$ množinu všech nenulových komplexních homomorfismů na A.

Tvrzení 13 (vlastnosti komplexních homomorfismů). *Nechť $h \in \Delta(A)$. Pak platí:*

(a) *$h(e) = 1$.*
(b) *Je-li $g \in G(A)$, je $h(g) \neq 0$.*
(c) *Je-li $a \in A$ a $\|a\| < 1$, je $|h(a)| < 1$. Speciálně, h je spojité a leží v uzavřené jednotkové sféře S_{A^*} duálního prostoru k Banachovu prostoru A.*

Poznámka. Platí věta (Gleason, Kahan, Zelazko), která říká, že komplexní lineární funkcionál na A s vlastnostmi (a) a (b) je multiplikativní.

Definice. Nechť A je Banachova algebra. **Ideálem** v A rozumíme vlastní vektorový podprostor $I \subset A$ takový, že kdykoli $x \in I$ a $y \in A$, platí $xy \in I$ a $yx \in I$. **Maximálním ideálem** v algebře A rozumíme ideál, který je maximální vzhledem k inkluzi.

Tvrzení 14 (vlastnosti ideálů a maximálních ideálů).

- *Je-li I ideál v A, je $I \cap G(A) = \emptyset$.*
- *Uzávěr ideálu v A je též ideálem v A.*
- *Každý ideál I v A je obsažen v maximálním ideálu J.*
- *Maximální ideál je uzavřený.*

Tvrzení 15 (faktorizace algeber). *Je-li A Banachova algebra (resp. komutativní Banachova algebra) s jednotkou a I je uzavřený ideál v A, pak Banachův kvocient A/I je Banachova algebra (resp. komutativní Banachova algebra) se součinem $q(x)q(y) = q(xy)$, kde q je kvocientové zobrazení Banachova prostoru A na Banachův prostor A/I, které je homomorfismem A na A/I.*

Tvrzení 16 (komplexní homomorfismy a maximální ideály).

- *Je-li $h \in \Delta(A)$, je $h^{-1}(0)$ uzavřený lineární podprostor kodimenze jedna v A, který tvoří maximální ideál v A.*
- *Je-li I ideál v A kodimenze jedna, pak existuje jediné $h \in \Delta(A)$ s $h^{-1}(0) = I$.*

Tvrzení 17. *Nechť $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Označme M_n Banachovu algebru všech komplexních matic typu $n \times n$. Pak $\Delta(M_n) = \emptyset$ a jediný ideál v M_n je nulový ideál.*

Věta 18 (o existenci komplexních homomorfismů a spektru). *Nechť A je komutativní Banachova algebra.*

(a) *Každý maximální ideál v A má kodimenzi jedna.*
(b) *Je-li I ideál v A, existuje $h \in \Delta(A)$, který je nulový na I.*
(c) *Je-li $x \in A$ a $\lambda \in \mathbb{C}$, pak $\lambda \in \sigma(x)$, právě když existuje $h \in \Delta(A)$ s $h(x) = \lambda$.*

Poznámka. Je-li A komutativní Banachova algebra, pak zobrazení $h \mapsto h^{-1}(0)$ je bijekce množiny $\Delta(A)$ na množinu všech maximálních vlastních ideálů.

Speciální případ tvrzení (c): $a \in G(A)$, právě když $h(a) \neq 0$ pro všechna $h \in \Delta(A)$.