I.6. **Gelfandova transformace.**

Lemma 25 (kompaktnost $\Delta(A)$)**.** *Nechť A je Banachova algebra. Pak $\Delta(A)$ je kompaktní ve w^* topologii prostoru A^*, tj. v topologii bodové konvergence na A.*

Definice. Nechť A je komutativní Banachova algebra.

- Pro $x \in A$ a $h \in \Delta(A)$ položme $\hat{x}(h) = h(x)$. Pak $\hat{x}$ je spojitá komplexní funkce na $\Delta(A)$, která se nazývá **Gelfandovou transformací prvku** x.
- **Gelfandovou transformací algebry** A rozumíme zobrazení $\Gamma : A \to C(\Delta(A))$ definované předpisem $\Gamma(x) = \hat{x}$, $x \in A$.

Poznámka.

- Γ je homomorfismus algebry A do algebry $C(\Delta(A))$ s jádrem
$$rad(A) := \bigcap\{I : I \text{ je maximální ideál v } A\}.$$
- $\Gamma(A)$ odděluje body $\Delta(A)$.
- Γ je izomorfismus algeber A a $\Gamma(A) = \hat{A}$, právě když $rad(A) = \{0\}$ ("A je polojednoduchá").
- Γ je topologický izomorfismus algeber A a $\Gamma(A)$, právě když $rad(A) = \{0\}$ a $\hat{A} = \Gamma(A)$ je uzavřená.

Tvrzení 26 (Gelfandova transformace a spektrum)**.** *Nechť A je komutativní Banachova algebra.*

- *Pro každé $x \in A$ platí $\hat{x}(\Delta(A)) = \sigma(x)$, speciálně $\|\hat{x}\| = r(x)$.*
- *Γ je homomorfismus a $\|\Gamma\| \leq 1$.*

Věta 27 (Gelfand-Naimark)**.** *Nechť A je komutativní C^*-algebra. Pak Γ je izometrický $*$-izomorfismus C^*-algebry A na C^*-algebru $C(\Delta(A))$ (mimo jiné tedy platí identita $\widehat{x^*} = \overline{\hat{x}}$ na A).*

Důsledek 28. *Nechť A a B jsou komutativní C^*-algebry. Pak A a B jsou $*$-izomorfní, právě když $\Delta(A)$ a $\Delta(B)$ jsou homeomorfní.*

Poznámka. Nechť A je komutativní Banachova algebra.

- Položme $s = \inf\limits_{x \in A\setminus\{0\}} \dfrac{\|\hat{x}\|_\infty}{x}$, $r = \inf\limits_{x \in A\setminus\{0\}} \dfrac{\|x^2\|}{\|x\|^2}$. Pak $s^2 \leq r \leq s$.
- Γ je topologický izomorfismus, právě když existuje $K < +\infty$ tak, že pro všechna $x \in A$ platí $\|x\|^2 \leq K\|x^2\|$.
- Γ je izometrie, právě když pro všechna $x \in A$ platí $\|x\|^2 = \|x^2\|$.