I. Vyjádřete primitivní funkce pomocí elementárních funkcí na maximálních intervalech existence

1. $\int x^3 + 2x + \frac{17}{x}\,\mathrm{d}x$ **2.** $\int 18e^x + 16e^{8x} - \frac{1}{x} + 3\cos x\,\mathrm{d}x$ **3.** $\int \sqrt[3]{1-3x}\,\mathrm{d}x$ **4.** $\int \frac{(1-x)^3}{x\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x$
5. $\int \frac{x^2}{(1-x)^{100}}\,\mathrm{d}x$ **6.** $\int \sin^7 x\cos x\,\mathrm{d}x$ **7.** $\int xe^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ **8.** $\int \mathrm{tg}\,x\,\mathrm{d}x$ **9.** $\int \mathrm{cotg}\,x\,\mathrm{d}x$
10. $\int \sqrt{x^6}\,\mathrm{d}x$ **11.** $\int |\cos x|\,\mathrm{d}x$ **12.** $\int \arcsin\sin\frac{4x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$ **13.** $\int \frac{2^{x+1}-5^{x-1}}{10^x}\,\mathrm{d}x$ **14.** $\int \frac{e^{3x}+1}{e^x+1}\,\mathrm{d}x$
15. $\int \mathrm{tg}^2 x\,\mathrm{d}x$ **16.** $\int \mathrm{cotg}^2 x\,\mathrm{d}x$ **17.** $\int \frac{\mathrm{d}x}{2+3x^2}$ **18.** $\int \sin^2 x\,\mathrm{d}x$ **19.** $\int \cos^4 x\,\mathrm{d}x$ **20.** $\int \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{\cos^2(x^3)}$
21. $\int \frac{x}{1+4x^2}\,\mathrm{d}x$ **22.** $\int \frac{x}{1+x^4}\,\mathrm{d}x$ **23.** $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\log x\log\log x}$ **24.** $\int xe^x\,\mathrm{d}x$ **25.** $\int \log x\,\mathrm{d}x$
26. $\int \mathrm{arctg}\,x\,\mathrm{d}x$ **27.** $\int \frac{\sin x}{e^x}\,\mathrm{d}x$ **28.** $\int e^{ax}\cos bx\,\mathrm{d}x$, $a,b\in\mathbb{R}$ **29.** $\int x^\alpha \log x\,\mathrm{d}x$
30. $\int x^3\log^2 x\,\mathrm{d}x$ **31.** $\int e^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ **32.** $\int \log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\,\mathrm{d}x$

– –

Výsledky a návody. Výsledky jsou uvedeny „až na konstantu“. **1.** $\frac14 x^4 + x^2 + 16\log|x|$ na $(-\infty,0)$ a na $(0,\infty)$ **2.** $18e^x + 2e^{8x} - \log|x| + 3\sin x$ na $(-\infty,0)$ a na $(0,\infty)$ **3.** $-\frac14(1-3x)^{\frac43}$, na $\mathbb{R}$ **4.** $-\frac{3}{\sqrt[3]{x}} - \frac92\sqrt[3]{x^2} + \frac95 x^{\frac53} - \frac38 x^{\frac83}$ na $(-\infty,0)$ a na $(0,\infty)$ **5.** $\frac{1}{99(1-x)^{99}} - \frac{1}{49(1-x)^{98}} + \frac{1}{97(1-x)^{97}}$, na $(-\infty,1)$ a na $(1,\infty)$ (substituce „$y = 1-x$“) **6.** $\frac18\sin^8 x$ na $\mathbb{R}$ **7.** $-\frac12 e^{-x^2}$ na $\mathbb{R}$ **8.** $-\log|\cos x|$ na každém z intervalů $(-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi)$, $k\in\mathbb{Z}$ **9.** $\log|\sin x|$ na každém z intervalů $(k\pi,(k+1)\pi)$, $k\in\mathbb{Z}$ **10.** $\frac14|x|\cdot x^3$, na $\mathbb{R}$ **11.** $\sin\left(x-\pi\cdot\left[\frac{x}{\pi}+\frac12\right]\right) + 2\cdot\left[\frac{x}{\pi}+\frac12\right]$, na $\mathbb{R}$ **12.**

$$F(x) = \begin{cases} 2\log(1+x^2)+\pi(x_2-x_1)+4\log\frac{x_1}{x_2} & x\in[-\infty,-x_2] \\ -\pi(x+x_1)-2\log(1+x^2)+4\log(\frac{4}{\pi}x_1) & x\in[-x_2,-x_1] \\ 2\log(1+x^2) & x\in[-x_1,x_1] \\ \pi(x-x_1)-2\log(1+x^2)+4\log(\frac{4}{\pi}x_1) & x\in[x_1,x_2] \\ 2\log(1+x^2)+\pi(x_2-x_1)+4\log\frac{x_1}{x_2} & x\in[x_2,\infty] \end{cases} \quad \text{a} \quad \begin{aligned} x_1 &= \frac{4-\sqrt{16-\pi^2}}{\pi} \\ x_2 &= \frac{4+\sqrt{16-\pi^2}}{\pi} \end{aligned}, \text{ na}$$

$\mathbb{R}$ **13.** $\frac{-10\cdot 5^{-x}\log 2 + 2^{-x}\log 5}{5\log 5\log 2}$, na $\mathbb{R}$ **14.** $\frac12 e^{2x} - e^x + x$, na $\mathbb{R}$ **15.** $\mathrm{tg}\,x - x$, na každém z intervalů $(-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi)$, $k\in\mathbb{Z}$ **16.** $-\mathrm{cotg}\,x - x$, na každém z intervalů $(k\pi,(k+1)\pi)$, $k\in\mathbb{Z}$ **17.** $\frac{1}{\sqrt6}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x\sqrt6}{2}$, na $\mathbb{R}$ **18.** $\frac{x}{2} - \frac14\sin 2x$, na $\mathbb{R}$ **19.** $\frac38 x + \frac38\sin x\cos x + \frac14\sin x\cos^3 x$, na $\mathbb{R}$ **20.** $\frac13\,\mathrm{tg}(x^3)$, na každém z intervalů $(\sqrt[3]{-\frac{\pi}{2}+k\pi}, \sqrt[3]{\frac{\pi}{2}+k\pi})$, $k\in\mathbb{Z}$ **21.** $\frac18\log(1+4x^2)$, na $\mathbb{R}$ **22.** $\frac12\,\mathrm{arctg}(x^2)$, na $\mathbb{R}$ **23.** $\log|\log\log x|$, na $(1,e)$ a na (e,∞) **24.** $(x-1)e^x$ na $\mathbb{R}$ **25.** $x\log x - x$ na $(0,\infty)$ **26.** $x\,\mathrm{arctg}\,x - \frac12\log(1+x^2)$ na $\mathbb{R}$ **27.** $-\frac12 e^{-x}\cdot(\sin x+\cos x)$, na $\mathbb{R}$ **28.** $\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\cdot(a\cos bx + b\sin bx)$ na $\mathbb{R}$, pokud $a^2+b^2\neq 0$; x na $\mathbb{R}$, pokud $a=b=0$ **29.** $\frac{x^{1+\alpha}}{1+\alpha}\cdot\left(\log x - \frac{1}{1+a}\right)$, na $(0,\infty)$ pro $\alpha\neq 1$; $\frac12\ln^2 x$, na $(0,\infty)$ pro $\alpha=-1$ **30.** $\frac14 x^4\ln^2 x - \frac18 x^4\ln x + \frac{1}{32}x^4$, na $(0,\infty)$ **31.** $2e^{\sqrt{x}}\cdot(\sqrt{x}-1)$, na $(0,\infty)$ (substituce „$y=\sqrt{x}$“) **32.** $x\log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) - \sqrt{x^2+1}$, na $\mathbb{R}$ (per partes $1\cdot\log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$)

==

II. Spočtěte primitivní funkce

1. $\int \frac{x^{17}-5}{x-1}\,\mathrm{d}x$ **2.** $\int \frac{x^{17}-5}{x^2-1}\,\mathrm{d}x$ **3.** $\int \frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x}\,\mathrm{d}x$ **4.** $\int \frac{x}{x^3-1}\,\mathrm{d}x$ **5.** $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^4+1}$
6. $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^2}$ pomocí $x = \mathrm{tg}\,y$ **7.** $\int \frac{x^8+x-1}{x^6+1}\,\mathrm{d}x$ **8.** $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+3x+4)^2}$
9. Pro jaký vztah mezi parametry a, b, $c\in\mathbb{R}$ je primitivní funkce k funkci f racionální, je-li $f(x) = \frac{ax^2+bx+c}{x^3(x-1)^2}$? **10.** $\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}$ **11.** $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\frac{\mathrm{d}x}{x}$ **12.** $\int \sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}\frac{\mathrm{d}x}{x}$ **13.** $\int \frac{\mathrm{d}x}{(4+x^2)\sqrt{4-x^2}}$
14. $\int \frac{1-\sqrt{x+1}}{1-\sqrt[3]{x+1}}\,\mathrm{d}x$ **15.** $\int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}\,\mathrm{d}x$ **16.** $\int \frac{\exp x}{\exp x+1}\,\mathrm{d}x$ **17.** $\int \frac{e^{2x}}{1+e^x}\,\mathrm{d}x$ **18.** $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x^2+2x+2}}$
19. $\int \sqrt{x^2-2x-1}\,\mathrm{d}x$ **20.** $\int \frac{(2x+3)\,\mathrm{d}x}{(x^2+2x+3)\sqrt{x^2+2x+4}}$ **21.** $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+1}}$ **22.** $\int \sqrt{x^2-1}\,\mathrm{d}x$
23. $\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$ **24.** $\int \frac{\sin x\cos x}{1+\sin^4 x}\,\mathrm{d}x$ **25.** $\int \frac{1}{\sin x}\,\mathrm{d}x$ **26.** $\int \frac{1}{\cos x}\,\mathrm{d}x$ **27.** $\int \frac{\sin^2 x}{\sin x+2\cos x}$
28. $\int \frac{\mathrm{d}x}{2\sin x-\cos x+5}$ **29.** $\int \frac{\mathrm{d}x}{(\sin^2 x+2\cos^2 x)^2}$ **30.** $\int \frac{\mathrm{d}x}{(2+\cos x)\sin x}$ **31.** $\int \frac{\sin^2 x}{1+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$
32. $\int \frac{\sin x\cos x}{\sin x+\cos x}\,\mathrm{d}x$ **33.** $\int \frac{\sin x}{\sin^3 x+\cos^3 x}\,\mathrm{d}x$

Výsledky a návody. **1.** $\left(\sum_1^{17}\frac{x^k}{k}\right)-4\log|x-1|$, $x\in(-\infty,1)$ nebo $x\in(1,+\infty)$ **2.** $\left(\sum_1^{8}\frac{1}{2k}x^{2k}\right)-2\log|x-1|+3\log|x+1|$, $x\in(-\infty,-1)$ nebo $x\in(-1,1)$ nebo $x\in(1,+\infty)$ **3.** $x+\frac16\log|x|-\frac92\log|x-2|+\frac{28}{3}\log|x-3|$, $x\in(-\infty,0)$ nebo $x\in(0,2)$ nebo $x\in(2,3)$ nebo $x\in(3,+\infty)$ **4.** $\frac16\log\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1}+\frac{\sqrt3}{3}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt3}$, $x\in(-\infty,1)$ nebo $x\in(1,+\infty)$ **5.** $\frac{\sqrt2}{8}\log\frac{x^2+x\sqrt2+1}{x^2-x\sqrt2+1}+\frac{\sqrt2}{4}\operatorname{arctg}(x\sqrt2+1)+\frac{\sqrt2}{4}\operatorname{arctg}(x\sqrt2-1)$ **6.** $\frac{x}{2(x^2+1)}+\frac12\operatorname{arctg}x$ **7.** $\frac13x^3+\frac16\log(1+x^2)+\frac{\sqrt3-1}{2}\log(x^2-x\sqrt3+1)-\frac{\sqrt3+1}{2}\log(x^2+x\sqrt3+1)-\frac{3-\sqrt3}{6}\operatorname{arctg}(2x-\sqrt3)-\frac{3+\sqrt3}{6}\operatorname{arctg}(2x+\sqrt3)$ **8.** $\frac17\cdot\frac{2x+3}{x^2+3x+4}+\frac{4\sqrt7}{49}\operatorname{arctg}\frac{2x+3}{\sqrt7}$ **9.** $a+2b+3c=0$ **10.** $6\Big(\frac19u^{(3/2)}-\frac18u^{(4/3)}+\frac17u^{(7/6)}-\frac16u+\frac15u^{(5/6)}-\frac14u^{(2/3)}\Big)$, kde $u=x+1$, $x\in(-1,+\infty)$ **11.** $\log\left|\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\right|+2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$, $x\in(-1,1)$ **12.** $\log\frac{|u^2-1|}{\sqrt{u^4+u^2+1}}-\sqrt3\operatorname{arctg}\frac{2u+1}{\sqrt3}+\sqrt3\operatorname{arctg}\frac{2u-1}{\sqrt3}$, kde $u=\sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}$, $x\in(-\infty,-1)$ nebo $x\in(-1,0)$ nebo $x\in(1,+\infty)$ **13.** $t=\sqrt{\frac{2-x}{2+x}}$ **14.** $t=\sqrt[6]{x+1}$ **15.** $t=\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$ **16.** $\log(e^x+1)$, $x\in\mathbb{R}$ **17.** $e^x-\log(1+e^x)$ **18.** $\frac{2}{x-\sqrt{x^2+2x+2}}-\log(\sqrt{x^2+2x+2}-x-1)$, $x\in\mathbb{R}$ **19.** $\frac12(x-1)\sqrt{x^2-2x-1}-\log|x-1+\sqrt{x^2-2x-1}|$, $x\in(-\infty,1-\sqrt2)$ nebo $x\in(1+\sqrt2,+\infty)$ **20.** $\log\frac{t^2-4t+6}{t^2+2}+\frac{1}{\sqrt2}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt2}-\frac{1}{\sqrt2}\operatorname{arctg}\frac{t-2}{\sqrt2}$, kde $t=\sqrt{x^2+2x+4}-x$, $x\in\mathbb{R}$ **21.** $\operatorname{argsinh}x=\log(x+\sqrt{x^2+1})$ na $\mathbb{R}$ **22.** $\frac12x\sqrt{x^2-1}-\frac12\log|x+\sqrt{x^2-1}|$ na $(-\infty,-1)$ a na $(1,+\infty)$ **23.** $\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2}+\frac12\arcsin x$ na $(-1,1)$ **24.** $\frac12\operatorname{arctg}\sin^2x$ na $\mathbf{R}$ **25.** $-\frac12\log\left|\frac{1+\cos x}{1-\cos x}\right|$ na každém z intervalů $(k\pi,(k+1)\pi)$, $k\in\mathbf{Z}$ **26.** $\frac12\log\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right|$ na každém z intervalů $(-\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi)$, $k\in\mathbf{Z}$ **27.** a **28.** substituce $y=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ **29.** substituce $y=\operatorname{tg}x$ **30.** substituce $y=\cos x$ **31.** substituce $y=\operatorname{tg}x$ **32.** substituce $y=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ **33.** substituce $y=\operatorname{tg}x$

===

III. Vypočtěte následující integrály

1. $\int_0^2|1-x|\,\mathrm{d}x$ **2.** $\int_{-1}^1\frac{\mathrm{d}x}{x^2-2x\cos\alpha+1}$, $\alpha\in(0,\pi)$ **3.** $\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}x}{1+\varepsilon\cos x}$, $\varepsilon\in[0,1)$

4. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{a^2\sin^2x+b^2\cos^2x}$, $ab\neq0$ **5.** $\int_0^{100\pi}\sqrt{1-\cos2x}\,\mathrm{d}x$ **6.** $\int_0^{\log2}xe^{-x}\,\mathrm{d}x$ **7.** $\int_0^{2\pi}x^2\cos x\,\mathrm{d}x$

8. $\int_{\frac1e}^{e}|\log x|\,\mathrm{d}x$ **9.** $\int_0^{\sqrt3}x\operatorname{arctg}x\,\mathrm{d}x$ **10.** $\int_0^{\log2}\sqrt{e^x-1}\,\mathrm{d}x$ **11.** $\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x$

12. $\int_0^1\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}\,\mathrm{d}x$ **13.** $\int_{-1}^1\frac{x\,\mathrm{d}x}{x^2+x+1}$ **14.** $\int_1^e(x\log x)^2\,\mathrm{d}x$ **15.** $\int_0^1x^{15}\sqrt{1+3x^8}\,\mathrm{d}x$

16. $\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}x}{(2+\cos x)(3+\cos x)}$ **17.** $\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}x}{\sin^4x+\cos^4x}$ **18.** $\int_0^{\pi}e^x\cos^2x\,\mathrm{d}x$ **19.** $\int_0^{+\infty}x^ne^{-x}\,\mathrm{d}x$, $n\in\mathbf{N}$

- -

Výsledky a návody. **1.** 1 **2.** $\frac{\pi}{2\sin\alpha}$ **3.** $\frac{2\pi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}$, substituce $t=\operatorname{cotg}\frac{x}{2}$ **4.** $\frac{\pi}{2|ab|}$ (např. $t=\operatorname{tg}x$) **5.** $200\sqrt2$ **6.** $\frac{1-\log2}{2}$ **7.** 4π **8.** $2-\frac2e$ **9.** $\frac23\pi-\frac{\sqrt3}{2}$ **10.** $2-\frac{\pi}{2}$ **11.** $\frac{1}{16}\pi a^4$ **12.** $\frac{\pi^2}{4}$ **13.** $\frac12\log3-\frac{\sqrt3}{6}\pi$ **14.** $\frac{5e^3-2}{27}$ **15.** $\frac{1+\sqrt2}{30}$ **16.** $\frac{\pi}{6}(4\sqrt3-3\sqrt2)$, substituce $t=\operatorname{cotg}\frac{x}{2}$ **17.** $2\pi\sqrt2$, např. substituce $t=\operatorname{tg}x$ na $(0,\frac{\pi}{2})$ **18.** $\frac35(e^{\pi}-1)$ **19.** $n!$

IV. Počítání Lebesgueových integrálů

1. Spočtěte obsah kruhu o poloměru r. **2.** Spočtěte objem koule o poloměru r.
3. Spočtěte obsah plochy ohraničené elipsou s poloosami délek a, b.
4. Spočtěte objem elipsoidu s poloosami délek a, b, c.
5. Spočtěte integrál $\int_{B(0,1)} (x^2+y^2)^\alpha \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ v závislosti na parametru $\alpha \in \mathbb{R}$.
6. Spočtěte integrál $\int_{\{[x,y]:\rho(x,y)>1\}} (x^2+y^2)^\alpha \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ v závislosti na parametru $\alpha \in \mathbb{R}$.
7. Spočtěte integrál $\int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ pomocí polárních souřadnic a zároveň ho vyjádřete pomocí Fubiniovy věty. Jako důsledek zjistěte hodnotu integrálu $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$.

Výsledky a návody. **1.** Uvažme kruh $B(0,r) = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 < r^2\}$, označme f jeho charakteristickou funkci. Obsah je pak roven integrálu $\int_{\mathbb{R}^2} f \,\mathrm{d}\lambda$. Ten lze spočítat z Fubiniovy věty $\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,\mathrm{d}\lambda(x,y) = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\,\mathrm{d}x$. Přitom $\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,\mathrm{d}y = \begin{cases} 0, & x \le -r \text{ nebo } x \ge r, \\ 2\sqrt{r^2-x^2}, & x \in (-r,r). \end{cases}$ Obsah je tedy roven $\int_{-r}^{r} 2\sqrt{r^2-x^2}\,\mathrm{d}x$, který se spočte jako Riemannův a vyjde πr^2. **2.** Uvažme kouli $B(0,r) = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 < r^2\}$, označme f jeho charakteristickou funkci. Objem je pak roven integrálu $\int_{\mathbb{R}^3} f\,\mathrm{d}\lambda$. Ten lze spočítat z Fubiniovy věty $\int_{\mathbb{R}^3} f(x,y,z)\,\mathrm{d}\lambda(x,y,z) = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y,z)\,\mathrm{d}\lambda(y,z)\right)\,\mathrm{d}x$. Přitom $\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y,z)\,\mathrm{d}\lambda(y,z)$ je roven 0, pokud $x \le -r$ nebo $x \ge r$, pro $x \in (-r,r)$ je roven obsahu kruhu o poloměru $\sqrt{r^2-x^2}$, což je dle předchozího příkladu rovno $\pi(r^2-x^2)$. Objem je tedy roven $\int_{-r}^{r} \pi r^2 - x^2\,\mathrm{d}x = \frac{4}{3}\pi r^3$. **3.** Tou plochou se myslí množina $A = \{[x,y] : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1\}$ a obsah je $\int \mathbb{R}^2 \chi_A\,\mathrm{d}\lambda$. Při výpočtu lze buď postupovat stejně jako v příkladu prvním (dostaneme o něco málo složitější integrál) nebo lze použít větu o substituci: Nejprve si obsah vyjádříme jako $\int_A 1\,\mathrm{d}\lambda$ a použijme substituci $\varphi(x,y) = [ax, by]$. Pak Jakobián je roven ab a $\varphi^{-1}(A) = B(0,1)$. Tedy $\int_A 1\,\mathrm{d}\lambda = \int_{B(0,1)} ab\,\mathrm{d}\lambda = \pi ab$. **4.** Onen elipsoid je množina $B = \{[x,y,z] : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} < 1\}$. Lze postupovat analogicky jako v předchozím případě, použít substituci $\varphi(x,y,z) = [ax, by, cz]$. Vyjde $\frac{4}{3}\pi abc$. **5.** Použijeme polární souřadnice, tedy substituci $\varphi(r,t) = [r\cos t, r\sin t]$, $(r,t) \in (0,+\infty)\times(0,2\pi)$. Jakobián je roven r, obor hodnot φ je rovina bez nezáporné polopřímky na ose x. Protože vynechaná množina je nulové míry, lze substituci použít a integrál se pomocí ní převede na $\int_{(0,1)\times(0,2\pi)} r^{2\alpha}\cdot r\,\mathrm{d}\lambda(r,t)$, který spočteme pomocí Fubiniovy věty. Vyjde $+\infty$ pro $\alpha \le -1$ a $\frac{\pi}{\alpha+1}$ pro $\alpha > -1$. **6.** Postupujeme stejně jako v předchozím příkladu, dostaneme $\int_{(1,+\infty)\times(0,2\pi)} r^{2\alpha}\cdot r\,\mathrm{d}\lambda(r,t)$, což vyjde $+\infty$ pro $\alpha \ge -1$ a $-\frac{\pi}{\alpha+1}$ pro $\alpha < -1$. **7.** Pomocí polárních souřadnic (viz předchozí dva příklady) integrál převedeme na $\int_{(0,+\infty)\times(0,2\pi)} re^{-r^2}\,\mathrm{d}\lambda(r,t) = \pi$. Podle Fubiniovy věty se původní integrál rovná $\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x\right)^2$, tedy $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

V. Lineární zobrazení a kvadratické formy

Je $L\colon U \to V$ lineární zobrazení? Pokud ano, jak vypadá $\mathrm{Ker}(L)$ a $\mathrm{Im}(L)$?

1. $U = \mathbf{R}^3$, $V = \mathbf{R}^4$; a) $L(u,v,w) = [u+w, w-v+7u, u, u]$, b) $L(u,v,w) = [u^2, v, 0, 0]$, c) $L(u,v,w) = [0,0,0,0]$, d) $L(u,v,w) = [u, v-1, 4w, u+w]$, e) $L(u,v,w) = [u,v,w,w]$, f) $L(u,v,w) = [u+v, u-v, w, 10u]$.
2. $U = C(\mathbf{R})$, $V = C(\mathbf{R})$; a) $L(f)(x) = f(x+1) - f(x)$, b) $L(f)(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$, c) $L(f)(x) = f(x^2)$, d) $L(f)(x) = \int_{x-1}^{x+1} f(t)\,\mathrm{d}t$.
3. $U = C^1(\mathbf{R})$, $V = C(\mathbf{R})$; a) $L(f)(x) = f'(x)$, b) $L(f)(x) = f(x) - f'(x)$, c) $L(f)(x) = \int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t$.
4. Zjistěte, zda následující matice jsou pozitivně definitní, negativně definitní atd.
a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; e) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$; f) $\begin{pmatrix} -10 & 1 & 1 \\ 1 & -10 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$;
g) $\begin{pmatrix} 10 & 1 & 3 \\ 1 & 10 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; h) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & 10 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$; i) $\begin{pmatrix} -3 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & -3 \end{pmatrix}$; j) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

Výsledky a návody. **1.** a) ANO, $\mathrm{Ker}(L) = \{[0,0,0]\}$, $\mathrm{Im}(L) = \mathrm{lin}_{\mathbf{R}}\{[1,7,1,1],[0,-1,0,0],[1,1,0,0]\} = \{[a,b,c,d] \in \mathbf{R}^4 : c = d\}$; b) NE (např. $L(2\cdot[1,0,0]) \neq 2 \cdot L([1,0,0])$); c) ANO, $\mathrm{Ker}(L) = \mathbf{R}^3$, $\mathrm{Im}(L) = \{[0,0,0,0]\}$; d) NE (např. $L(0,0,0) \neq [0,0,0,0]$); e) ANO, $\mathrm{Ker}(L) = \{[0,0,0]\}$, $\mathrm{Im}(L) = \mathrm{lin}_{\mathbf{R}}\{[1,0,0,0],[0,1,0,0],[0,0,1,1]\} = \{[a,b,c,d] \in \mathbf{R}^4 : c = d\}$; f) ANO, $\mathrm{Ker}(L) = \{[0,0,0]\}$, $\mathrm{Im}(L) = \mathrm{lin}_{\mathbf{R}}\{[1,1,0,10],[1,-1,0,0],[0,0,1,0]\} = \{[a,b,c,d] \in \mathbf{R}^4 : d = 5(a+b)\}$. **2.** a) ANO, $\mathrm{Ker}(L)$ tvoří 1-periodické funkce, $\mathrm{Im}(L) = C(\mathbf{R})$ (mírně obtížnější); b) ANO, $\mathrm{Ker}(L) = \{0\}$, $\mathrm{Im}(L) = \{f \in C^1(\mathbf{R})\colon f(0) = 0\}$; c) ANO, $\mathrm{Ker}(L) = \{f \in C(\mathbf{R})\colon f \restriction \langle 0, +\infty) = 0\}$, $\mathrm{Im}(L)$ tvoří sudé funkce z $C(\mathbf{R})$; d) ANO, $\mathrm{Ker}(L)$ tvoří 2-periodické funkce splňující navíc $\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$, $\mathrm{Im}(L) = C^1(\mathbf{R})$ (obojí mírně obtížnější). **3.** a) ANO, $\mathrm{Ker}(L)$ tvoří konstantní funkce, $\mathrm{Im}(L) = C(\mathbf{R})$; b) ANO, $\mathrm{Ker}(L) = \mathrm{lin}_{\mathbf{R}}\{e^x\} = \{ae^x\colon a \in \mathbf{R}\}$, $\mathrm{Im}(L) = C(\mathbf{R})$; c) ANO, $\mathrm{Ker}(L)$ tvoří konstantní funkce, $\mathrm{Im}(L) = \{f \in C^1(\mathbf{R})\colon f(0) = 0\}$. **4.** a) ID, b) PD, c),d) PSD, ne PD; e) ID, f) ND, g) PD, h) PSD, ne PD, i),j) ID.

VI. Najděte vlastní čísla a všechny jim příslušné vlastní vektory pro matice

1. $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ **2.** $\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$ **3.** $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ **4.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$ **5.** $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & 2 \\ -5 & 1 & 5 \end{pmatrix}$
6. $\begin{pmatrix} 5 & 0 & -2 \\ 2 & 3 & -2 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ **7.** $\begin{pmatrix} 8 & -1 & -3 \\ 8 & 1 & -4 \\ 7 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ **8.** $\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 6 & -2 & -2 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ **9.** $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 5 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$
10. $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ **11.** $\begin{pmatrix} -23 & 21 & 3 & -17 \\ -40 & 35 & 4 & -31 \\ 58 & -50 & -5 & 47 \\ -8 & 6 & 0 & -7 \end{pmatrix}$

Výsledky a návody. (ve formátu: (vlastní číslo, násobnost, množina vlastních vektorů)) **1.** $(1, 1, \{t\cdot[1,2]\colon t \in \mathbf{C}\setminus\{0\}\})$, $(2, 1, \{t\cdot[1,1]\colon t \in \mathbf{C}\setminus\{0\}\})$. **2.** $(6, 1, \{t\cdot[2,1]\colon t \in \mathbf{C}\setminus\{0\}\})$, $(-5, 1, \{t\cdot[3,-4]\colon t \in \mathbf{C}\setminus\{0\}\})$. **3.** $(1+i, 1, \{t\cdot[1,i]\colon t \in \mathbf{C}\setminus\{0\}\})$, $(1-i, 1, \{t\cdot[1,-i]\colon t \in \mathbf{C}\setminus\{0\}\})$. **4.** $(3, 2, \{t\cdot[1,1]\colon t \in \mathbf{C}\setminus\{0\}\})$. **5.** $(1, 1, \{t\cdot[1,1,1]\colon t \in \mathbf{C}\setminus\{0\}\})$, $(2, 1, \{t\cdot[1,2,1]\colon t \in \mathbf{C}\setminus\{0\}\})$, $(3, 1, \{t\cdot[1,1,2]\colon t \in \mathbf{C}\setminus\{0\}\})$. **6.** $(1, 1, \{t\cdot[1,1,2]\colon t \in \mathbf{C}\setminus\{0\}\})$, $(3, 2, \{t\cdot[1,0,1] + s\cdot[0,1,0]\colon [s,t] \in \mathbf{C}^2\setminus\{[0,0]\}\})$. **7.** $(1, 1, \{t\cdot[1,1,2]\colon t \in \mathbf{C}\setminus\{0\}\})$, $(3, 2, \{t\cdot[1,2,1]\colon t \in \mathbf{C}\setminus\{0\}\})$. **8.** $(0, 3, \{t\cdot[1,3,0] + s\cdot[0,-1,1]\colon [s,t] \in \mathbf{C}^2\setminus\{[0,0]\}\})$. **9.** $(0, 3, \{t\cdot[1,1,2]\colon t \in \mathbf{C}\setminus\{0\}\})$. **10.** $(1, 3, \{t\cdot[1,1,1]\colon t \in \mathbf{C}\setminus\{0\}\})$. **11.** $(i, 2, \{t\cdot[3,4,-5+i,0] + s\cdot[-7-i,0,-8-10i,8]\colon [s,t] \in \mathbf{C}^2\setminus\{[0,0]\}\})$, $(-i, 2, \{t\cdot[3,4,-5-i,0] + s\cdot[-7+i,0,-8+10i,8]\colon [s,t] \in \mathbf{C}^2\setminus\{[0,0]\}\})$.

VII. Nalezněte lokální extrémy následujících funkcí v uvedených množinách:

1. $f(x,y)=x^4+y^4-x^2-2xy-y^2; M=\mathbb{R}^2$ **2.** $f(x,y)=xy+\frac{50}{x}+\frac{20}{y}; M=\{(x,y); x>0; y>0\}$
3. $f(x,y)=x^2y^3(6-x-y); M=\{(x,y); x>0; y>0\}$
***4.** $f(x,y)=x^2y^3(6-x-y); M=\mathbb{R}^2$ **5.** $f(x,y)=8\log(x^2+y^2+1)-3xy$, $M=\mathbb{R}^2$.
6. $f(x,y,z)=x+\frac{y^2}{4x}+\frac{z^2}{y}+\frac{2}{z}$, $M=\{(x,y,z); x>0, y>0, z>0\}$.
7. $f(x,y,z)=x^4-y^4-x^2-2xy-y^2$, $M=\mathbb{R}^2$ **8.** $f(x,y)=e^x(x^2-y^2+xy)$, $M=\mathbb{R}^2$.
9. Dokažte, že funkce $f(x,y)=(1+e^y)\cos x-ye^y$ nabývá lokálního maxima v nekonečně mnoha bodech, avšak lokálního minima ani v jednom bodě.

– –

Výsledky a návody. **1.** Ostré lokální minimum v bodech $[-1,-1]$ a $[1,1]$; sedlový bod $[0,0]$ (vyšetřte chování f v okolí počátku na přímkách $y=0$ a $y=-x$). **2.** Ostré lokální minimum v bodě $[5,2]$. **3.** Ostré lokální maximum v bodě $[2,3]$. **4.** Ostré lokální maximum v bodě $[2,3]$, neostré lokální maximum v bodech $[0,y]$ pro $y<0$ a pro $y>6$, neostré lokální minimum v bodech $[0,y]$ pro $y\in(0,6)$, sedlové body $[0,6]$ a $[x,0]$ pro $x\in\mathbb{R}$. (Pro rozlišení neostrých extrémů a sedlových bodů vyšetřete znaménko f.) **5.** Ostré lokální minimum v bodě $[0,0]$, sedlové body $[\sqrt{\frac{13}{6}},\sqrt{\frac{13}{6}}]$ a $[-\sqrt{\frac{13}{6}},-\sqrt{\frac{13}{6}}]$. **6.** Ostré lokální minimum v bodě $[\frac{1}{2},1,1]$. **7.** Nemá lokální extrémy (sedlový bod $[0,0]$ – vyšetřete chování na přímkách procházejících počátkem). **8.** Ostré lokální maximum v bodě $[-2,-1]$, sedlový bod $[0,0]$. **9.** Ostrá lokální maxima jsou v bodech $[2k\pi,0]$, $k\in\mathbb{Z}$; sedlové body $[(2k+1)\pi,-2]$, $k\in\mathbb{Z}$.

==

VIII. Najděte Taylorův polynom k-tého řádu v bodě 0 pro funkce

1. $\operatorname{tg} x$, $k=4$. **2.** $\cos(\sin x)$, $k=5$. **3.** $\sin(\sin x)$, $k=6$. **4.** $\sin(1-\cos x)$, $k=3$.
5. $\operatorname{arctg} x$, $k\in\mathbf{N}$. **6.** $\arcsin x$, $k\in\mathbf{N}$.

Spočtěte limity (pomocí Taylorova polynomu)

7. $\lim_{x\to0}\frac{\cos x-e^{\frac{-x^2}{2}}}{x^4}$ **8.** $\lim_{x\to0}\frac{e^x\sin x-x(1+x)}{x^3}$ **9.** $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[6]{x^6+x^5}-\sqrt[6]{x^6-x^5}\right)$
10. $\lim_{x\to+\infty}x^{\frac{3}{2}}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}-2\sqrt{x}\right)$ **11.** $\lim_{x\to0}\frac{a^x+a^{-x}-2}{x^2}$ $(a>0)$ **12.** $\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)$
13. $\lim_{x\to+\infty}\left(x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)$ **14.** $\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}-\frac{\cos x}{\sin x}\right)$ **15.** $\lim_{x\to+\infty}\left(\left(x^3-x^2+\frac{x}{2}\right)e^{\frac{1}{x}}-\sqrt{x^6+1}\right)$
16. Najděte $n\in\mathbb{N}$, aby limita a)* $\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{tg}(\sin x)-\sin(\operatorname{tg} x)}{x^n}$, b) $\lim_{x\to0}\frac{(1+x)^x-1}{x^n}$ c) $\lim_{x\to0}\frac{\cos x-\cos(\operatorname{tg} x)}{x^n}$, d) $\lim_{x\to0}\frac{e-(1+x)^{\frac{1}{x}}}{x^n}$ byla konečná a různá od 0, a spočtěte tuto limitu.
17. Najděte $a,b\in\mathbb{R}$, aby $\lim_{x\to0}\frac{x-(a+b\cos x)\sin x}{x^4}=0$.
18. Najděte $a,b\in\mathbb{R}$, aby $\lim_{x\to0}\frac{x-a\sin x-b\operatorname{tg} x}{x^4}=0$ a spočtěte $\lim_{x\to0}\frac{x-a\sin x-b\operatorname{tg} x}{x^5}$.

– –

Výsledky a návody. **1.** $x+\frac{1}{3}x^3$ **2.** $1-\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{24}x^4$ **3.** $x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{10}x^5$ **4.** $\frac{1}{2}x^2$ **5.** $T^0_{2k-1}(x)=T^0_{2k}(x)=\sum_{j=1}^k\frac{(-1)^{j-1}}{2j-1}x^{2j-1}$. **6.** $T^0_{2k-1}(x)=T^0_{2k}(x)=\sum_{j=1}^k\binom{-1/2}{j-1}\frac{x^{2j-1}}{2j-1}$. **7.** $-\frac{1}{12}$ **8.** $\frac{1}{3}$ **9.** $\frac{1}{3}$ (lze i elementárně, pomocí vhodného rozšíření) **10.** $-\frac{1}{4}$ (lze i elementárně, pomocí dvojího vhodného rozšíření, takový postup je početně náročnější) **11.** $\log^2 a$ **12.** 0 **13.** $\frac{1}{2}$ **14.** $\frac{1}{3}$ **15.** $\frac{1}{6}$ **16.** (a) $n=7$, limita je $\frac{1}{30}$; (b) $n=2$, limita je 1; (c) $n=4$, limita je $\frac{1}{3}$; (d) $n=1$, limita je $\frac{e}{2}$. **17.** $a=\frac{4}{3}$, $b=-\frac{1}{3}$ **18.** $a=\frac{2}{3}$, $b=\frac{1}{3}$, limita vyjde $-\frac{1}{20}$