V.3 Vztah Laplaceovy a Fourierovy transformace

Symbol $\mathcal{L}$ nechť označuje Laplaceovu transformaci. Dále, nechť $\mathcal{F}$ označuje Fourierovu transformaci na $\mathbb{R}$, tj.

$$\mathcal{F}(f)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-ixt}\,\mathrm{d}t, \qquad x \in \mathbb{R}, f \in L^1(\mathbb{R}).$$

Nechť $f \in L_1^+$. Předpokládejme, že f je dodefinováno nulou na $(-\infty, 0)$. Pak

$$\mathcal{L}(f)(x+iy) = \mathcal{F}(t \mapsto e^{-xt}f(t))(y), \qquad x, y \in \mathbb{R}, x > c_f.$$

Nechť dále $\mathcal{F}_{-1}$ označuje inverzní Fourierovu transformaci na $\mathbb{R}$ ve smyslu hlavní hodnoty, tj.

$$\mathcal{F}_{-1}(f)(t) = \lim_{R\to+\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-R}^{R} f(x)e^{itx}\,\mathrm{d}t, \qquad t \in \mathbb{R}$$

pro f lokálně integrovatelné na $\mathbb{R}$, pokud limita existuje.

Je-li F a c jako ve Větičce 6, pak

$$\mathcal{L}_{-1}(F)(t) = e^{\xi t}\mathcal{F}_{-1}(x \mapsto F(\xi + ix))(t), \qquad t \in \mathbb{R},$$

kde $\xi > c$ je libovolné. Přičemž této rovnosti je třeba rozumět ve smyslu „má-li jedna strana smysl“.

Pomocí těchto vztahů lze přenášet výsledky o Fourierově transformaci na výsledky o Laplaceově transformaci. Například:

- Věta 5 plyne z prostoty Fourierovy transformace.
- Dále platí věta o inverzi ve tvaru: Nechť $f \in L_1^+$ je dodefinována nulou na $(-\infty, 0)$ a navíc existuje posloupnost

  $$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots,$$

  která má limitu $+\infty$, taková, že na každém z intervalů (t_{j-1}, t_j) má funkce f spojitou derivaci, která má navíc vlastní jednostranné limity v krajních bodech. Pak pro každé $t \in \mathbb{R}$ je

  $$\mathcal{L}_{-1}(\mathcal{L}(f))(t) = \frac{1}{2}\left(\lim_{s\to t-} f(s) + \lim_{s\to t+} f(s)\right).$$

- Totéž platí za obecnějšího předpokladu, že f má konečnou variaci na každém omezeném intervalu.