VI.4 Rouchéova věta a její důsledky

Věta 8 (princip argumentu). *Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je oblast, Γ cykl takový, že $\langle\Gamma\rangle \subset G$ a pro každé $a \in \mathbb{C} \setminus G$ je $\operatorname{ind}_\Gamma a = 0$. Nechť $f \in M(G)$ na $\langle\Gamma\rangle$ nabývá jen konečných nenulových hodnot. Je-li $a \in G$ kořenem funkce f, označme $N_f(a)$ jeho násobnost. Má-li funkce f v bodě $a \in G$ pól, označme $P_f(a)$ jeho násobnost. Pak platí:*

$$\sum_{a\in G, f(a)=0} N_f(a)\cdot \operatorname{ind}_\Gamma a - \sum_{a\in G, f(a)=\infty} P_f(a)\cdot \operatorname{ind}_\Gamma a = \\ = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f'}{f} = \frac{1}{2\pi i}\Delta_\Gamma \log f.$$

Věta 9 (Rouchéova věta pro cykl). *Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je oblast, Γ cykl takový, že $\langle\Gamma\rangle \subset G$ a pro každé $a \in \mathbb{C}\setminus G$ je $\operatorname{ind}_\Gamma a = 0$. Nechť $f, g \in M(G)$ splňují pro každé $z \in \langle\Gamma\rangle$*

$$|f(z) - g(z)| < |f(z)|.$$

Pak (při značení z Věty 8)

$$\sum_{a\in G, f(a)=0} N_f(a)\cdot \operatorname{ind}_\Gamma a - \sum_{a\in G, f(a)=\infty} P_f(a)\cdot \operatorname{ind}_\Gamma a = \\ = \sum_{a\in G, g(a)=0} N_g(a)\cdot \operatorname{ind}_\Gamma a - \sum_{a\in G, g(a)=\infty} P_g(a)\cdot \operatorname{ind}_\Gamma a.$$

Důsledek 10. *Nechť $a \in \overline{\mathbb{C}}$, $R > 0$, f je holomorfní na $U(a,R)$, $b = f(a)$ a funkce $f - b$ má v bodě a kořen násobnosti $p \in \mathbb{N}$ (tj. f* **nabývá své hodnoty v bodě** *a p-***násobně***). Pak existuje $r \in (0,R)$ a $\rho > 0$ tak, že pro každé $w \in P(b,\rho)$ f nabývá hodnoty w v právě p různých bodech z $U(a,r)$.*

Důsledek 11. *Nechť $a \in \overline{\mathbb{C}}$, $R > 0$, f je holomorfní na $P(a,R)$ a má v bodě a pól násobnosti $p \in \mathbb{N}$. Pak existuje $r \in (0,R)$ a $M > 0$ tak, že pro každé $w \in \mathbb{C}$, $|w| > M$, f nabývá hodnoty w v právě p různých bodech z $P(a,r)$.*

Věta 12 (věta o otevřeném zobrazení). *Nechť $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$ je oblast a f je nekonstantní meromorfní funkce na Ω. Pak f je otevřené zobrazení, tj. $f(G)$ je otevřená podmnožina $\overline{\mathbb{C}}$ pro každou $G \subset \Omega$ otevřenou.*

Věta 13 (věta o lokální existenci inverzní funkce). *Nechť f je funkce holomorfní na okolí bodu $a \in \mathbb{C}$ a $f'(a) \neq 0$. Pak existuje $r > 0$ s následujícími vlastnostmi:*

(i) *f je prostá na $U(a, r)$;*
(ii) *$G = f(U(a, r))$ je otevřená množina;*
(iii) *inverzní funkce f^{-1} je holomorfní na G a pro každé $z \in G$ platí*

$$(f^{-1})'(z) = \frac{1}{f'(f^{-1}(z))}.$$

Věta 14. *Nechť f je funkce meromorfní na otevřené množině $\Omega \subset \overline{\mathbb{C}}$. Označme $M = \{a \in \Omega : f(a) = \infty\}$. Předpokládejme, že f je prostá na $\Omega \setminus M$. Pak množina M obsahuje nejvýše jeden bod a, pokud nějaký obsahuje, je v něm pól násobnosti 1. Navíc pro každé $z \in (\Omega \cap \mathbb{C}) \setminus M$ je $f'(z) \neq 0$, f je prostá na Ω a inverzní funkce k f je meromorfní na $f(\Omega)$.*

Věta 15 (cykl okolo kompaktu). *Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je neprázdná otevřená množina a $K \subset G$ je kompaktní množina. Pak existuje cykl Γ, pro který platí*

(i) $\langle \Gamma \rangle \subset G \setminus K$,
(ii) $\operatorname{ind}_\Gamma z = 1$ *pro* $z \in K$,
(iii) $\operatorname{ind}_\Gamma z = 0$ *pro* $z \in \mathbb{C} \setminus G$.
(iv) *Index vzhledem k Γ nabývá jen hodnot 0 nebo 1.*

Poznámka. Nechť G, K a Γ jsou jako ve Větě 15. Pak pro každou $f \in H(G)$ platí

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(w)}{w - z}\,\mathrm{d}w, \qquad z \in K.$$

Věta 16 (Rouchéova věta pro kompakt). *Nechť $K \subset \mathbb{C}$ je kompaktní množina a $\Omega = \operatorname{Int} K$. Nechť f, g jsou spojité funkce definované na K s hodnotami v $\overline{\mathbb{C}}$, které jsou meromorfní na Ω. Předpokládejme, že pro každé $z \in \partial K$ platí $|f(z) - g(z)| < |f(z)|$. Pak (při značení z Věty 8)*

$$\sum_{a \in \Omega, f(a)=0} N_f(a) - \sum_{a \in \Omega, f(a)=\infty} P_f(a) = \sum_{a \in \Omega, g(a)=0} N_g(a) - \sum_{a \in \Omega, g(a)=\infty} P_g(a).$$