VII.3 Aproximace pomocí racionálních funkcí

Věta 8 (Runge). *Nechť $K \subset \mathbb{C}$ je kompaktní množina a $M \subset \overline{\mathbb{C}} \setminus K$ je množina obsahující z každé komponenty množiny $\overline{\mathbb{C}} \setminus K$ alespoň jeden bod. Pak pro každou $f \in H(K)$ existuje posloupnost R_n racionálních funkcí s póly pouze v množině M, která konverguje k f stejnoměrně na K.*

Důsledek. *Je-li $K \subset \mathbb{C}$ taková kompaktní množina, že $\mathbb{C} \setminus K$ je souvislá, pak pro každou $f \in H(K)$ existuje posloupnost polynomů konvergující k f stejnoměrně na K.*

Poznámka. Předchozí důsledek neplatí pro žádnou kompaktní $K \subset \mathbb{C}$, pro níž není $\mathbb{C} \setminus K$ souvislá.

Věta 9 (Runge). *Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je otevřená a $M \subset \overline{\mathbb{C}} \setminus G$ je množina obsahující z každé komponenty množiny $\overline{\mathbb{C}} \setminus G$ alespoň jeden bod. Pak množina všech racionálních funkcí, které mají póly jen v bodech množiny M, je hustá v $H(G)$.*

Důsledek. *Je-li $G \subset \mathbb{C}$ taková otevřená množina, že $\overline{\mathbb{C}} \setminus G$ je souvislá, pak polynomy jsou husté v $H(G)$.*

Poznámka. Předchozí důsledek neplatí pro žádnou otevřenou $G \subset \mathbb{C}$, pro níž není $\overline{\mathbb{C}} \setminus G$ souvislá.

Věta 10 (Runge). *Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je otevřená, $M \subset \overline{\mathbb{C}} \setminus G$ a $c : M \to \{1, \infty\}$. Předpokládejme, že každá komponenta množiny $\overline{\mathbb{C}} \setminus M$ obsahuje buď hromadný bod množiny M nebo takové $m \in M$, pro které je $c(m) = \infty$. Nechť Y je množina všech racionálních funkcí s póly jen v bodech množiny M; přičemž, je-li $c(m) = 1$, je násobnost pólu v bodě m nejvýše 1. Pak Y je hustá v $H(G)$.*

Věta 11 (Mittag-Leffler). *Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je otevřená množina, $A \subset G$ množina izolovaná v G a pro každé $a \in A$ nechť P_a je polynom splňující $P_a(0) = 0$. Pak existuje $f \in M(G)$, která má póly právě v bodech množiny A, a hlavní část Laurentova rozvoje funkce f v prstencovém okolí bodu $a \in A$ je $P_a(\frac{1}{z-a})$.*

Věta 12. *Nechť $D = U(0, 1)$. Označme*

$$M = \{f \in H(D) : (\forall \alpha \in \mathbb{R})(\{f(re^{i\alpha}) : r \in (0, 1)\} \text{ je hustá v } \mathbb{C})\}.$$

Pak $H(D) \setminus M$ je první kategorie v $H(D)$.