I.3 Hardyho prostory na jednotkovém disku

Definice. Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je otevřená a $u : \Omega \to [-\infty, +\infty)$ funkce. Funkce u se nazývá **subharmonická**, jestliže je shora polospojitá a navíc pro každé $a \in \Omega$ a $R > 0$ takové, $\overline{U(a,R)} \subset \Omega$, platí

$$u(a) \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(a + Re^{it})\, \mathrm{d}t,$$

přičemž integrál vpravo není roven $-\infty$.

Poznámka: Podobně lze definovat **superharmonické** funkce (jsou zdola polospojité, mají hodnoty v $(-\infty, +\infty]$, splňují opačnou nerovnost a příslušné integrály nejsou rovny $+\infty$). Funkce je harmonická, právě když je zároveň subharmonická a superharmonická.

Věta 13. *Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je oblast a $f \in H(\Omega)$ není konstantní nulová funkce. Pak funkce $\log|f|$, $\log^+|f|$ a $|f|^p$ ($p \in (0, +\infty)$) jsou subharmonické na Ω.*

Poznámka: V předchozí větě klademe $\log 0 = -\infty$ a $\log^+ t = (\log t)^+ = \max\{\log t, 0\}$ pro $t \in [0, \infty)$.

Věta 14. *Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je otevřená a u je funkce subharmonická na Ω. Nechť $a \in \Omega$ a $R > 0$ je takové, že $\overline{U(a,R)} \subset \Omega$. Nechť h je funkce spojitá na $\overline{U(a,R)}$ a harmonická na $U(a,R)$. Pokud platí $u \leq h$ na kružnici $|z - a| = R$, pak $u \leq h$ na $U(a,R)$.*

Značení:

- $\mathbb{D} = U(0,1) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$

Pro $f \in H(\mathbb{D})$ a $r \in [0,1)$ označme:

- $M_0(f,r) = \exp\left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log^+ \left|f(re^{i\theta})\right| \mathrm{d}\theta\right)$
- $M_p(f,r) = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left|f(re^{i\theta})\right|^p \mathrm{d}\theta\right)^{1/p}$ $(0 < p < \infty)$
- $M_\infty(f,r) = \sup_{\theta \in [-\pi,\pi)} \left|f(re^{i\theta})\right|$

Věta 15. *Nechť $f \in H(\mathbb{D})$.*

- *Pro každé $p \in [0, \infty]$ je funkce $r \mapsto M_p(f,r)$ neklesající na $[0,1)$.*
- *Pro každé $r \in (0,1)$ je funkce $p \mapsto M_p(f,r)$ neklesající na $(0, \infty]$.*
- *Pro $r \in (0,1)$ a $p \in (0, \infty)$ platí $M_0(f,r)^p \leq 1 + M_p(f,r)^p$.*

Definice.

- Pro $f \in H(\mathbb{D})$ a $p \in [0, \infty]$ označme
$$\|f\|_p = \sup_{r \in [0,1)} M_p(f,r) = \lim_{r \to 1-} M_p(f,r).$$
- Pro $p \in (0, \infty]$ označme
$$H^p = \{f \in H(\mathbb{D}) : \|f\|_p < \infty\}.$$
- Dále označme
$$N = \{f \in H(\mathbb{D}) : \|f\|_0 < \infty\}.$$

Poznámka. Pro $0 < s < p \leq \infty$ platí $H^p \subset H^s \subset N$.

Lemma 16. *Nechť $f \in N$. Pak existují takové $g, h \in H(\mathbb{D})$, že $\|g\|_\infty \leq 1$, $h \in N$, h nenabývá na $\mathbb{D}$ nuly a pro každé $p \in [0, \infty]$ platí $\|f\|_p = \|h\|_p$.*

Lemma 17. *Nechť $f \in H^p$.*

- *Je-li $p \geq 1$, pak pro $r \in (0,1)$ platí $M_\infty(f,r) \leq \frac{1}{1-r}\|f\|_1 \leq \frac{1}{1-r}\|f\|_p$.*
- *Je-li $p \in (0,1)$, pak pro $r \in (0,1)$ platí $M_\infty(f,r) \leq \frac{3}{(1-r)^{1+\frac{1}{p}}}\|f\|_p$.*

Věta 18.

- *Pro $p \in [1, \infty]$ je $(H^p, \|\cdot\|_p)$ Banachův prostor.*
- *Pro $p \in (0, 1)$ je H^p úplný metrický lineární prostor s metrikou definovanou vzorcem $\rho_p(f, g) = \|f - g\|_p^p$.*

Věta 19. *Nechť $f \in H(\mathbb{D})$ splňuje*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \qquad z \in \mathbb{D}.$$

Pak platí:

$$\|f\|_2^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2.$$

Pokud navíc $f \in H^2$, pak platí:

(1) *Pro skoro všechna $t \in [0, 2\pi)$ existuje limita $f^*(e^{it}) = \lim_{r \to 1-} f(re^{it})$.*
(2) *$f^* \in L^2(\mathbb{T})$*
(3) *Pro $n \in \mathbb{Z}$ nechť $\varphi_n(e^{it}) = e^{int}$, $t \in [-\pi, \pi)$. Pak $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ je ortonormální báze $L^2(\mathbb{T})$ a vyjádření f^* vůči této bázi je*

$$f^* = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n.$$

(4) $\lim_{r \to 1-} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| f^*(e^{it}) - f(re^{it}) \right|^2 \mathrm{d}t = 0.$
(5) $f = P[f^*]$
(6) *Nechť γ je kladně orientovaná jednotková kružnice. Pak*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f^*(w)}{w - z} \, \mathrm{d}w, \qquad z \in \mathbb{D}.$$

Důsledek. *H^2 je Hilbertův prostor a zobrazení $f \mapsto f^*$ je izometrie H^2 na uzavřený podprostor $L^2(\mathbb{T})$ generovaný funkcemi φ_n, $n \geq 0$. (Tento podprostor je tvořen všemi $g \in L^2(\mathbb{T})$, jejichž koeficienty u φ_n, $n < 0$, ve vyjádření vůči ortonormální bázi φ_n, $n \in \mathbb{Z}$ jsou nulové, tj. pro které platí $\hat{g}(n) = 0$ pro $n < 0$.)*

Věta 20. *Nechť $p \in [1, \infty]$ a $f \in H^p$. Pak pro skoro všechna $t \in [0, 2\pi)$ existuje limita $f^*(e^{it}) = \lim_{r \to 1-} f(re^{it})$. Navíc platí:*

(1) $f^* \in L^p(\mathbb{T})$
(2) $\|f^*\|_p = \|f\|_p$
(3) $f = P[f^*]$
(4) *Nechť γ je kladně orientovaná jednotková kružnice. Pak*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f^*(w)}{w - z} \, \mathrm{d}w, \qquad z \in \mathbb{D}.$$

(5) *Jestliže $p < \infty$, pak $\lim_{r \to 1-} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| f^*(e^{it}) - f(re^{it}) \right|^p \mathrm{d}t = 0.$*

Věta 21. *Nechť $f \in H(\mathbb{D})$ a $p \in [1, \infty]$. Pak $f \in H^p$, právě když existuje $g \in L^p(\mathbb{T})$ taková, že $\hat{g}(n) = 0$ pro všechna $n < 0$ a $f = P[g]$.*