II.2 Neomezeně pokračovatelné funkce

Definice. Nechť $\boldsymbol{f}$ je analytická funkce v oblasti Ω.

- Nechť $G \subset \Omega$ je oblast. Říkáme, že $\boldsymbol{f}$ je **neomezeně pokračovatelná v oblasti** G, jestliže pro každý analytický element $(f, D) \in \boldsymbol{f}$ splňující $D \subset G$ a každou spojitou křivku $\gamma : [0,1] \to G$ takovou, že $\gamma(0)$ je střed kruhu D existuje analytické pokračování elementu (f, D) podél křivky γ v oblasti G.
- Je-li $\boldsymbol{f}$ neomezeně pokračovatelná v Ω, říkáme, že je **neomezeně pokračovatelná**.

Věta 3. *Nechť $\boldsymbol{f}$ je analytická funkce v oblasti Ω, která je neomezeně pokračovatelná. Pak existuje takové $p \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, že f je přesně p-značná.*

Věta 4. *Nechť $\boldsymbol{f}$ je jednoznačná analytická funkce v oblasti Ω. Pak*

- *existuje $f \in H(\operatorname{dom}(\boldsymbol{f}))$ splňující*

$$\boldsymbol{f} = \{(f, D) : D \text{ je kruh a } D \subset \operatorname{dom}(\boldsymbol{f})\};$$

- *$\boldsymbol{f}$ je neomezeně pokračovatelná v $\operatorname{dom}(\boldsymbol{f})$.*

Lemma 5. *Nechť $\boldsymbol{f}$ je analytická funkce v oblasti Ω, neomezeně pokračovatelná v oblasti $G \subset \Omega$. Nechť $(f, D) \in \boldsymbol{f}$ splňuje $D \subset G$ a γ_1, γ_2 nechť jsou spojité křivky definované na $[0,1]$ s hodnotami v G takové, že $\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$ je střed kruhu D a $\gamma_1(1) = \gamma_2(1)$. Dále předpokládejme, že existuje spojité zobrazení $H : [0,1] \times [0,1] \to G$ takové, že*

- $H(s, 0) = \gamma_1(s)$ *pro* $s \in [0,1]$,
- $H(s, 1) = \gamma_2(s)$ *pro* $s \in [0,1]$,
- $H(0, t) = \gamma_1(0)$ *pro* $t \in [0,1]$,
- $H(1, t) = \gamma_1(1)$ *pro* $t \in [0,1]$.

Pak elementy, které jsou analytickým pokračováním (f, D) podél γ_1 v oblasti G, jsou stejné jako elementy, které jsou analytickým pokračováním (f, D) podél γ_2 v oblasti G.

Věta 6 (o monodromii). *Nechť Ω je jednoduše souvislá oblast. Pak každá neomezeně pokračovatelná analytická funkce v Ω je jednoznačná.*