III.3 Hartogsova rozšiřovací věta a oblasti holomorfie

Větička 11. *Nechť $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Nechť $G \subset \mathbb{C}^{n-1}$ je oblast, $z \in \mathbb{C}$ a $r > 0$. Označme $\Omega = G \times U(z,r)$. Nechť $V \subset \Omega$ je oblast splňující podmínky:*

- *Existuje takové $s \in (0,r)$, že $\Omega \setminus V \subset G \times U(z,s)$.*
- *Existuje neprázdná otevřená $H \subset G$ splňující $H \times U(z,r) \subset V$.*

Pak každá holomorfní funkce na V lze rozšířit na holomorfní funkci na Ω.

Lemma 12. *Nechť $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, a $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ je oblast. Označme symbolem p projekci $\mathbb{C}^n$ na $\mathbb{C}^{n-1}$ definovanou vynecháním poslední souřadnice. Pak pro každou kompaktní podmnožinu $K \subset \Omega$ a každé $\boldsymbol{x} \in p(\Omega)$ existuje cykl Γ v $\mathbb{C}$ a polydisk $\mathbb{P}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{r}) \subset p(\Omega)$ s vlastnostmi:*

(i) $\forall \boldsymbol{y} \in \mathbb{P}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{r})\ \forall z \in \mathbb{C} : (\boldsymbol{y},z) \in \mathbb{C}^n \setminus \Omega \Rightarrow \operatorname{ind}_\Gamma z = 0.$
(ii) $\forall \boldsymbol{y} \in \mathbb{P}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{r})\ \forall z \in \mathbb{C} : (\boldsymbol{y},z) \in K \Rightarrow \operatorname{ind}_\Gamma z = 1.$

Věta 13 (Hartogsova rozšiřovací věta). *Nechť $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ je oblast a $K \subset \Omega$ je kompaktní množina, pro kterou je $\Omega \setminus K$ souvislá. Pak každou holomorfní funkci na $\Omega \setminus K$ lze rozšířit na holomorfní funkci na Ω.*

Definice. Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ je oblast. Pak Ω nazýváme **oblastí holomorfie**, jestliže existuje funkce f holomorfní na Ω taková, že kdykoli $\boldsymbol{x}$ je hraničním bodem Ω a $\mathbb{P}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{r})$ je libovolný polydisk se středem $\boldsymbol{x}$, pak neexistuje funkce g holomorfní na $\mathbb{P}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{r})$, která se rovná f alespoň na jedné komponentě množiny $\Omega \cap \mathbb{P}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{r})$.

Poznámka: Každá neprázdná oblast v $\mathbb{C}$ je oblastí holomorfie.

Věta 14. *Oblast $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ je oblastí holomorfie, právě když pro každou kompaktní množinu $K \subset \Omega$ je množina*

$$\hat{K} = \{\boldsymbol{x} \in \Omega : \forall f : \Omega \to \mathbb{C} \text{ holomorfní } |f(\boldsymbol{x})| \leq \sup_{\boldsymbol{y} \in K} |f(\boldsymbol{y})|\}$$

opět kompaktní.

Důsledek. *Každá otevřená konvexní množina v $\mathbb{C}^n$ je oblastí holomorfie.*