Lemma XI.16 $G \subset \mathbb{C}$ otevřená, u subharmonická na G, $\overline{U(a,r)} \subset G \Rightarrow$

$$u(a) \le \frac{1}{\pi r^2} \int_{U(a,r)} u \, d\lambda$$

Dk: Připomeňme: $u: G \to [-\infty, \infty)$ je subharmonická, pokud je shora polospojitá a když $\overline{U(a,R)} \subset G$, pak

$$u(a) \le \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(a + Re^{it}) \, dt$$

, přičemž integrál vpravo není $-\infty$

Tedy $\forall s \in (0, r)$:

$$u(a) \le \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(a + se^{it}) \, dt$$

$$\int_0^r s \cdot u(a) \, ds \le \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_0^r \int_0^{2\pi} s \cdot u(a + se^{it}) \, dt \, ds}$$

$$\| \qquad\qquad\qquad \| \text{ polární souřadnice (*)}$$

$$u(a) \cdot \left[\frac{s^2}{2} \right]_0^r \qquad\qquad \frac{1}{2\pi} \int_{U(0,r)} u \, d\lambda$$

$$\| $$

$$\frac{u(a) \cdot r^2}{2}$$

$$\Rightarrow u(a) = \frac{1}{\pi r^2} \int_{U(0,r)} u \, d\lambda$$

*) u shora polospojitá $\Rightarrow$ u borelovsky měřitelná a navíc shora omezená na $\overline{U(a,r)}$ (kompaktní množina). Proto lze použít Fubiniovu větu, integrál spočítat postupně a následně použít větu o substituci.

Lemma XI.17. Buď $G \subset \mathbb{C}$ otevřená, (u_k) posloupnost subharmonických funkcí na G. Nechť platí:

- (u_k) jsou stejně shora omezené na G
- $\forall z \in G: \limsup\limits_{k \to \infty} u_k(z) \le C$

Pak $\forall K \subset G$ kompaktní $\forall \varepsilon > 0$ $\exists k_0 \in \mathbb{N}$:

$$\forall z \in K \ \forall k \ge k_0 : u_k(z) \le C + \varepsilon$$

Důkaz: $\boxed{1}$ $\overline{U(x,r)} \subset G \Rightarrow u_k(x) \le \frac{1}{\pi r^2} \int\limits_{U(x,r)} u(y)\, dy$ [L 16]

$\boxed{2}$ Nechť $\overline{U(x, r+2\delta)} \subset G$ (kde $\delta > 0$) a $|z - x| < \delta$

Pak $U(x,r) \subset U(z, r+\delta) \subset U(x, r+2\delta)$

Máme tedy: $$u_k(z) \le \frac{1}{\pi(r+\delta)^2} \int\limits_{U(z,r+\delta)} u_k(y)\, dy =$$

$$= \frac{1}{\pi(r+\delta)^2} \left(\int\limits_{U(x,r)} u_k(y)\, dy + \int\limits_{U(z,r+\delta) \setminus U(x,r)} u_k(y)\, dy \right) \le$$

$$\le \frac{1}{\pi(r+\delta)^2} \int\limits_{U(x,r)} u_k(y)\, dy + \frac{\pi(r+\delta)^2 - \pi r^2}{\pi(r+\delta)^2} \cdot M =$$

[M je konstanta omezující shora všechny u_k]

$$= \frac{1}{\pi(r+\delta)^2} \int\limits_{U(x,r)} u_k(y)\, dy + M \cdot \frac{\delta(2r+\delta)}{(r+\delta)^2}$$

$\boxed{3}$ $x \in G$, $\varepsilon > 0$ buďte dána. Zvolme $r > 0$, aby $\overline{U(x,3r)} \subset G$ a $\delta > 0$, $\delta < r$, aby

$$\frac{M \cdot \delta(2r+\delta)}{(r+\delta)^2} + C \cdot \frac{r^2}{(r+\delta)^2} < C + \varepsilon$$

Pak dle $\boxed{2}$ máme

$\forall z \in U(x,\delta)$ $\forall k \in \mathbb{N}$

$$u_k(z) \le \frac{1}{\pi(r+\delta)^2} \int_{U(x,r)} u_k(y)\,dy + \frac{M \cdot \delta(2r+\delta)}{(r+\delta)^2} \quad (\square)$$

$$\limsup_{k\to\infty} \frac{1}{\pi(r+\delta)^2} \int_{U(x,r)} u_k(y)\,dy \overset{\text{Fatouovo Lemma } [u_k \le M \ \forall k]}{\le} \frac{1}{\pi(r+\delta)^2} \int_{U(x,r)} \limsup_{k\to\infty} u_k(y)$$

$$\le \frac{C \cdot r^2}{(r+\delta)^2}$$

Proto $\limsup\limits_{k\to\infty}$ (~~pravá~~ strana $\square$) $\le \frac{Cr^2}{(r+\delta)^2} + \frac{M\cdot\delta(2r+\delta)}{(r+\delta)^2} < C+\varepsilon$

Tedy $\exists k_0 \ \forall k \ge k_0$: (Pravá ~~...~~ strana $\square$) $< C+\varepsilon$

Tedy $\forall k \ge k_0 \ \forall z \in U(x,\delta)$: $u_k(z) < C + \varepsilon$

$\boxed{4}$ K kompaktní ... $\forall x \in K \ \exists \delta_x \ \exists k_x \ \forall k \ge k_x \ \forall z \in U(x,\delta_x)$: $u_k(z) < C+\varepsilon$

$U(x,\delta_x)$, $x \in K$ ... otevřené pokrytí K, existuje konečné podpokrytí příslušné $x_1, \dots, x_m$ ... $k_0 := \max\{k_{x_1}, \dots, k_{x_m}\}$ funguje.