Věta IX.12 $G \subset \mathbb{C}$ omezená jednoduše souvislá oblast
$f: G \xrightarrow{na} U(0,1)$ konformní

$\boxed{1}$ $w \in \partial G$ jednoduchý $\Rightarrow$ f lze spojitě rozšířit na $G \cup \{w\}$
Po rozšíření $|f(w)| = 1$

$\ulcorner$ w jednoduchý $\Rightarrow$ $\forall (z_n) \subset G,\ z_n \to w$ $\exists \varphi : [0,1] \to \mathbb{C}$ křivka
$\varphi([0,1)) \subset G,\ \varphi(1) = w$ a navíc
$\exists\ t_n \nearrow 1 : \varphi(t_n) = z_n$ pro $n \in \mathbb{N}$

Tedy z definice a L11: $(z_n) \subset G,\ z_n \to w \Rightarrow f(z_n)$ konverguje k bodu na $\mathbb{T}$.
Navíc pro každé dvě posloupnosti je ta limita stejná
(máme-li (z_n), (y_n), uvažme posloupnost
$z_1, y_1, z_2, y_2, z_3, y_3, \dots$)

Tedy existuje $\lim\limits_{\substack{z \to w \\ z \in G}} f(z) \in \mathbb{T}$. To dokončuje důkaz. $\lrcorner$

$\boxed{2}$ $w_1, w_2 \in \partial G$ jednoduché, $w_1 \neq w_2$
$\Rightarrow$ f lze spojitě rozšířit na $G \cup \{w_1, w_2\}$.
Po rozšíření $f(w_1) \neq f(w_2)$.

Dk: • Existence rozšíření plyne z $\boxed{1}$. Zbývá ukázat $f(w_1) \neq f(w_2)$

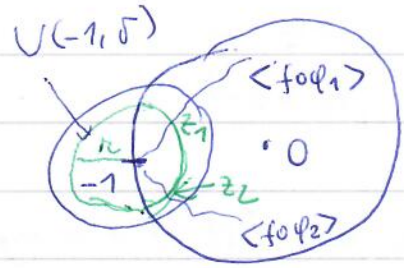
• Nechť $f(w_1) = f(w_2)$. BÚNO $f(w_1) = f(w_2) = -1$
Uvažme $\varphi_j : [0,1] \to \mathbb{C}$ spojité, $\varphi_j([0,1)) \subset G$,
$\varphi_j(1) = w_j$ pro $j = 1,2$

Zvolme $\varepsilon > 0$, $\varepsilon < \frac{1}{4}|w_1 - w_2|$

zvolme $t_0 \in (0,1)$, aby $\varphi_j([t_0,1]) \subset U(w_j, \varepsilon)$ $(j=1,2)$

Dále $f(\varphi_j([0,t_0]))$ je kompaktní podmnožina $U(0,1)$

$\Rightarrow \exists \delta > 0$ $U(-1,\delta) \cap f(\varphi_j([0,t_0])) = \emptyset$ $(j=1,2)$



$\forall r \in (0,\delta)$ $\exists z_1, z_2 \in U(0,1)$, že

- $|z_j + 1| = r$
- $z_j \in \langle f\circ\varphi_j|[t_0,1] \rangle$

$\Big\}$ $j=1,2$

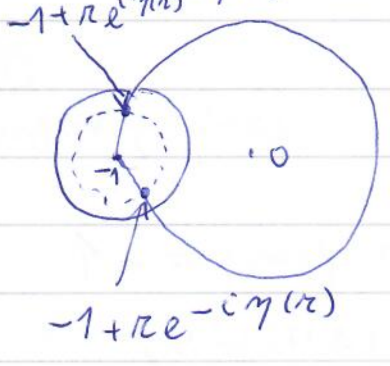
$g := f^{-1}$. zvolme pevné $r \in (0,\delta)$. vezmeme ta z_1, z_2

Pak $g(z_j) \in \varphi_j([t_0,1]) \subset U(w_j, \varepsilon)$

Protože $|w_1 - w_2| > 4\varepsilon$, máme $|g(z_1) - g(z_2)| > 2\varepsilon$

$$2\varepsilon < |g(z_1) - g(z_2)| = \left| \int_{\text{úhel č. 1}}^{\text{úhel č. 2}} g'(-1+re^{it})\, re^{it} \cdot i \, dt \right|$$

$$\leq \int_{-\eta(r)}^{\eta(r)} |g'(-1+re^{it})| \cdot r \, dt \underset{\text{Cauchy Schwarz}}{\leq} r \cdot \left(\int_{-\eta(r)}^{\eta(r)} 1^2 \, dt \right)^{1/2} \left(\int_{-\eta(r)}^{\eta(r)} |g'(1+re^{it})|^2 dt \right)^{1/2}$$



$0 < \eta(r) < \frac{\pi}{2}$

$$\leq r \cdot \sqrt{\pi} \cdot \left(\int_{-\eta(r)}^{\eta(r)} |g'(1+re^{it})|^2 dt \right)^{1/2}$$

$$\frac{4\varepsilon^2}{\pi r} \leq r \cdot \int_{-\eta(r)}^{\eta(r)} |g'(1+re^{it})|^2 dt$$

To platí pro každé $r \in (0,\delta)$

udělejme $\int^{\delta}$:

$$\underset{+\infty}{\overset{\parallel}{\int_0^\delta \frac{4q^2}{\pi r}\,dr}} \le \int_0^\delta \int_{-\eta(r)}^{\eta(r)} r\,|g'(1+re^{it})|^2\,dt\,dr =$$

$$\underset{\text{polární souřadnice}}{\overset{\text{substituce}}{=}} \int_{U(-1,\delta)\cap U(0,1)} |g'(t+iy)|^2\,dt\,dy \overset{\text{subst. to}}{=} \lambda^2\big(g(U(-1,\delta)\cap U(0,1))\big) < +\infty$$

g omezená

To je spor.

<u>Důsledek</u>: $G \subset \mathbb{C}$ omezená jednoduše souvislá oblast, každý bod $w \in \partial G$ jednoduchý. Pak lze každé konformní zobrazení G na $U(0,1)$ rozšířit na homeomorfismus $\overline{G}$ na $\overline{U(0,1)}$.

<u>Dk</u>: ~~Dk~~ Nechť $g: G \xrightarrow{na} U(0,1)$ je konformní.

Dle Věty 11 (1) $\forall w \in \partial G$ lze definovat $g(w) = \lim_{\substack{z \to w \\ z \in G}} g(z)$,

přičemž $g(w) \in \mathbb{T}$. Navíc dle (2) je toto rozšíření prosté.
Zřejmě je g spojitá na G.
Spojitost v bodech $w \in \partial G$: $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists \delta > 0$ $\varphi(G \cap U(w,\delta)) \subset U(g(w),\varepsilon)$

pokud $x \in \partial G \cap U(w,\delta) \Rightarrow \varphi(x) \in \overline{\varphi(G \cap U(w,\delta))} \subset \overline{U(g(w),\varepsilon)}$
Tedy $g(\overline{G} \cap U(w,\delta)) \subset \overline{U(g(w),\varepsilon)}$ $\Longrightarrow$ g spojitá ~~na~~ v bodě w
g spojité, $\overline{G}$ kompaktní $\Rightarrow$ $g(\overline{G})$ kompaktní $\Rightarrow$ g je na
g spojité a prosté na kompaktní množině $\Rightarrow$ g je homeomorfismus