IV.4 Funkce spojité na intervalu

Definice. Nechť J je (nedegenerovaný) interval. Funkce $f : J \to \mathbf{R}$ je **spojitá na intervalu** J, je-li spojitá zprava v každém bodě, který není koncovým bodem intervalu J, a spojitá zleva v každém bodě, který není počátečním bodem J.

Věta 15 (Heineho věta pro spojitost na intervalu). *Nechť J je interval a $f : J \to \mathbf{R}$ je funkce. Pak f je spojitá na intervalu J, právě když pro každé $x \in J$ a každou posloupnost $\{x_n\}$ prvků J takovou, že $\lim x_n = x$, platí $\lim f(x_n) = f(x)$.*

Věta 16 (o spojitosti složené funkce na intervalu). *Nechť I a J jsou intervaly, funkce f je spojitá na intervalu J, funkce g je spojitá na intervalu I a splňuje $g(I) \subset J$. Pak funkce $f \circ g$ je spojitá na intervalu I.*

Věta 17 (Bolzanova o nabývání mezihodnot). *Nechť f je spojitá funkce na intervalu $\langle a, b\rangle$ a platí $f(a) < f(b)$. Pak ke každému $c \in (f(a), f(b))$ existuje $x \in (a, b)$ takové, že $f(x) = c$.*

Věta 18 (o spojitém obrazu intervalu). *Nechť J je interval a funkce $f : J \to \mathbf{R}$ je spojitá na J. Potom $f(J)$ je interval nebo jednobodová množina.*

Věta 19 (o omezenosti spojité funkce na uzavřeném intervalu). *Budiž f funkce spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$. Potom je f na $\langle a, b\rangle$ omezená.*

Věta 20 (spojitá funkce na uzavřeném intervalu nabývá extrémů). *Budiž f funkce spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$. Potom funkce f nabývá na $\langle a, b\rangle$ své největší hodnoty (maxima) a své nejmenší hodnoty (minima).*

Věta 21 (o spojitosti inverzní funkce). *Budiž f spojitá a rostoucí (klesající) funkce na intervalu J. Potom funkce f^{-1} je spojitá a rostoucí (klesající) na intervalu $f(J)$.*

Věta 22 (derivace inverzní funkce). *Nechť funkce f je na intervalu (a, b) spojitá a ryze monotonní a má v bodě $x_0 \in (a, b)$ derivaci $f'(x_0)$ vlastní a různou od nuly. Potom má funkce f^{-1} derivaci v bodě $y_0 = f(x_0)$ a platí rovnost*

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

Poznámka. Pokud v situaci popsané v předchozí větě je $f'(x_0)$ nevlastní, je $(f^{-1})'(y_0) = 0$. Je-li $f'(x_0) = 0$, je $(f^{-1})'(y_0) = \begin{cases} +\infty, & \text{je-li } f \text{ rostoucí,} \\ -\infty, & \text{je-li } f \text{ klesající.} \end{cases}$