IV.5 Elementární funkce – logaritmus a exponenciála

Věta 23 (zavedení logaritmu). *Existuje jediná funkce (značíme ji* log *a nazýváme ji* **přirozeným logaritmem**), *která má tyto vlastnosti:*

(L1) $D_{\log} = (0, +\infty)$;
(L2) *funkce* log *je na* $(0, +\infty)$ *rostoucí;*
(L3) $\forall x, y \in (0, +\infty)\colon\ \log xy = \log x + \log y$;
(L4) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\log x}{x-1} = 1$.

Poznámka. Vlastnost L2 je důsledkem vlastností L1, L3 a L4. Přesvědčíme se o tom později.

Věta 24 (další vlastnosti logaritmu). *Dále platí*

(L5) $\log 1 = 0$;
(L6) $\forall x \in (0, +\infty) : \log 1/x = -\log x$;
(L7) $\forall x \in (0, +\infty)\ \forall n \in \mathbf{Z} : \log x^n = n \log x$;
(L8) $\lim\limits_{x \to +\infty} \log x = +\infty,\ \lim\limits_{x \to 0+} \log x = -\infty$;
(L9) $\log' x = \frac{1}{x}$ *pro každé* $x \in (0, +\infty)$;
(L10) log *je spojitá na* $(0, +\infty)$;
(L11) $H_{\log} = \mathbf{R}$;
(L12) *existuje právě jedno číslo* $e \in (0, +\infty)$ *splňující* $\log e = 1$.

Definice. **Exponenciální funkcí** nazýváme funkci inverzní k funkci log. Značíme ji exp.

Věta 25 (vlastnosti exponenciální funkce).

(E1) $D_{\exp} = \mathbf{R}$, $H_{\exp} = (0, +\infty)$;
(E2) *funkce* exp *je spojitá a rostoucí na* $\mathbf{R}$;
(E3) $\exp 0 = 1$, $\exp 1 = e$;
(E4) $\forall x, y \in \mathbf{R} : \exp(x + y) = \exp x \cdot \exp y$;
(E5) $\lim\limits_{x \to +\infty} \exp x = +\infty,\ \lim\limits_{x \to -\infty} \exp x = 0$;
(E6) $\exp' x = \exp x$ *pro každé* $x \in \mathbf{R}$;
(E7) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\exp(x)-1}{x} = 1$.

Definice.

- Nechť $a \in (0, +\infty)$, $b \in \mathbf{R}$. **Obecnou mocninou** a^b rozumíme číslo $a^b = \exp(b \log a)$.
- Nechť $a, b \in (0, +\infty)$, $a \neq 1$. **Obecným logaritmem** $\log_a b$ rozumíme číslo $\log_a b = \frac{\log b}{\log a}$

Větička 26. *Platí:*

- $\forall a, b \in (0, +\infty), a \neq 1\colon\ a^{\log_a b} = b$;
- $\forall a \in (0, +\infty), a \neq 1\, \forall b \in \mathbf{R}\colon\ \log_a a^b = b$;
- $\forall a \in (0, +\infty) \forall b, c \in \mathbf{R}\colon\ a^b \cdot a^c = a^{b+c}, (a^b)^c = a^{bc}$;
- $\forall a \in (0, +\infty)\colon\ a^{-1} = 1/a \,\&\, \forall n \in \mathbf{N}\colon\ a^n = \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ krát}}$
- $\forall a, b, c \in (0, +\infty), a \neq 1\colon\ \log_a(bc) = \log_a b + \log_a c$.