VI.5 Matice a lineární zobrazení

Poznámka. V tomto oddíle ztotožňujeme $\mathbf{R}^n$ a $M(n \times 1)$.

Definice. Řekneme, že zobrazení $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ je **lineární**, pokud platí:

(i) $\forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbf{R}^n : \ f(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) = f(\boldsymbol{u}) + f(\boldsymbol{v})$,
(ii) $\forall \lambda \in \mathbf{R}\ \forall \boldsymbol{u} \in \mathbf{R}^n : \ f(\lambda \boldsymbol{u}) = \lambda f(\boldsymbol{u})$.

Definice. Řekneme, že matice $\mathbb{A} \in M(m \times n)$ **reprezentuje** zobrazení $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$, pokud platí

$$\forall \boldsymbol{u} \in \mathbf{R}^n : \ f(\boldsymbol{u}) = \mathbb{A}\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}.$$

Věta 18 (reprezentace lineárních zobrazení). *Zobrazení $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ je lineární právě tehdy, když existuje matice $\mathbb{A} \in M(m \times n)$, která reprezentuje f.*

Věta 19. *Nechť zobrazení $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ je lineární. Pak jsou následující tvrzení ekvivalentní:*

(i) *f je bijekce (tj. je prosté zobrazení $\mathbf{R}^n$ na $\mathbf{R}^n$),*
(ii) *f je prosté zobrazení,*
(iii) *f je zobrazení $\mathbf{R}^n$ na $\mathbf{R}^n$.*

Poznámky. (1) Z Věty 15 plyne, že lineární zobrazení $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ je bijekce, právě když jeho reprezentující matice je regulární.

(2) Jestliže matice $\mathbb{A} \in M(n \times n)$ není regulární, pak podle Věty 19 existuje vektor pravých stran $\boldsymbol{b} \in M(n \times 1)$, pro který má soustava $\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ alespoň dvě různá řešení. (Lze vzít $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{o}$.)

(3) Z předchozí bodu plyne, že ve Větě 15 lze přidat další ekvivalentní podmínku: Pro každé $\boldsymbol{b} \in M(n \times 1)$ má soustava $\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ nejvýše jedno řešení.

Věta 20. *Nechť $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ je lineární zobrazení reprezentované maticí $\mathbb{A} \in M(m \times n)$ a $g : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^k$ je lineární zobrazení reprezentované maticí $\mathbb{B} \in M(k \times m)$. Potom složené zobrazení $g \circ f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^k$ je lineární a je reprezentováno maticí $\mathbb{B}\mathbb{A}$.*

Poznámka. Z Vět 19 a 20 plyne poznámka (iii) z oddílu VI.2.