VIII.1 Riemannův integrál – zavedení a základní vlastnosti

Definice. Konečnou posloupnost $D = \{x_j\}_{j=0}^n$ nazýváme **dělením** intervalu $\langle a, b\rangle$, jestliže platí

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b.$$

Body $x_0, \ldots, x_n$ nazýváme **dělícími body. Normou dělení** D rozumíme číslo

$$\nu(D) = \max\{x_j - x_{j-1};\ j = 1, \ldots, n\}.$$

Řekneme, že dělení D' intervalu $\langle a, b\rangle$ je **zjemněním dělení** D intervalu $\langle a, b\rangle$, jestliže každý dělící bod D je i dělícím bodem D'.

Definice. Nechť f je omezená funkce definovaná na intervalu $\langle a, b\rangle$.

Je-li $D = \{x_j\}_{j=0}^n$ dělení intervalu $\langle a, b\rangle$, označme

$$\overline{S}(f, D) = \sum_{j=1}^{n} M_j(x_j - x_{j-1}),\ \text{kde } M_j = \sup\{f(x);\ x \in \langle x_{j-1}, x_j\rangle\}$$

(tzv. **horní součet** příslušný funkci f a dělení D),

$$\underline{S}(f, D) = \sum_{j=1}^{n} m_j(x_j - x_{j-1}),\ \text{kde } m_j = \inf\{f(x);\ x \in \langle x_{j-1}, x_j\rangle\}$$

(tzv. **dolní součet** příslušný funkci f a dělení D).

Dále položme

$$\overline{\int_a^b} f = \inf\{\overline{S}(f, D);\ D \text{ je dělením intervalu } \langle a, b\rangle\}$$

(tzv. **horní Riemannův integrál** funkce f přes $\langle a, b\rangle$),

$$\underline{\int_a^b} f = \sup\{\underline{S}(f, D);\ D \text{ je dělením intervalu } \langle a, b\rangle\}$$

(tzv. **dolní Riemannův integrál** funkce f přes $\langle a, b\rangle$).

Řekneme, že funkce f má **Riemannův integrál přes** $\langle a, b\rangle$, pokud $\overline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^b} f$. Hodnota tohoto integrálu je pak rovna $\overline{\int_a^b} f$. Značíme ji $\int_a^b f$ nebo též $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Pokud $a > b$, definujeme $\int_a^b f = -\int_b^a f$, v případě, že $a = b$, definujeme $\int_a^b f = 0$.

Větička 1. *Nechť f je omezená funkce definovaná na $\langle a, b\rangle$. Pak platí:*

(1) *Jsou-li D_1 a D_2 dělení intervalu $\langle a, b\rangle$, pak existuje dělení D, které je zjemněním každého z nich.*

(2) *Nechť D, D' jsou dělení intervalu $\langle a, b\rangle$ a D' zjemňuje D. Pak platí*

$$\underline{S}(f, D) \leq \underline{S}(f, D') \leq \overline{S}(f, D') \leq \overline{S}(f, D)$$

(3) *Jsou-li D_1, D_2 dvě dělení intervalu $\langle a, b\rangle$, pak $\underline{S}(f, D_1) \leq \overline{S}(f, D_2)$.*

(4) $\underline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} f$.

Větička 2. *Nechť f je omezená funkce definovaná na $\langle a, b\rangle$.*

(i) *Nechť $I \in \mathbf{R}$. Pak $I = \int_a^b f$, právě když pro každé $\varepsilon > 0$ existuje dělení D intervalu $\langle a, b\rangle$ takové, že*

$$I - \varepsilon < \underline{S}(f, D) \leq \overline{S}(f, D) < I + \varepsilon.$$

(ii) *Funkce f má Riemannův integrál přes interval $\langle a, b\rangle$, právě když pro každé $\varepsilon > 0$ existuje dělení D intervalu $\langle a, b\rangle$, pro které $\overline{S}(f, D) - \underline{S}(f, D) < \varepsilon$.*

Věta 3 (vlastnosti Riemannova integrálu). *Nechť f a g jsou omezené funkce na intervalu $\langle a, b\rangle$.*

(i) *Jestliže f má Riemannův integrál přes interval $\langle a, b\rangle$ a $\langle c, d\rangle \subset \langle a, b\rangle$, pak f má Riemannův integrál i přes interval $\langle c, d\rangle$.*

(ii) *Je-li $c \in (a, b)$ a f má Riemannův integrál přes interval $\langle a, c\rangle$ i přes interval $\langle c, b\rangle$, pak má Riemannův integrál i přes interval $\langle a, b\rangle$ a platí*

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

(iii) *Nechť funkce f, g mají Riemannův integrál přes interval $\langle a, b\rangle$ a nechť $\alpha \in \mathbf{R}$. Pak i funkce αf a $f + g$ mají Riemannův integrál přes interval $\langle a, b\rangle$ a platí*

$$\int_a^b \alpha f = \alpha \int_a^b f, \qquad \int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g.$$

(iv) *Nechť funkce f, g mají Riemannův integrál přes interval $\langle a, b\rangle$ a platí $f(x) \geq g(x)$ pro každé $x \in \langle a, b\rangle$. Pak*

$$\int_a^b f \geq \int_a^b g.$$

(v) *Nechť funkce f má Riemannův integrál přes interval $\langle a, b\rangle$. Pak i funkce $|f|$ má Riemannův integrál přes $\langle a, b\rangle$ a platí*

$$\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|.$$