VIII.5 Integrace racionálních funkcí

Definice. **Racionální funkcí** budeme rozumět podíl dvou polynomů, kde polynom ve jmenovateli není identicky roven nule.

Věta 21 (o dělení polynomů). *Nechť P a Q jsou dva polynomy (s komplexními koeficienty), přičemž polynom Q není identicky roven nule. Pak existují jednoznačně určené polynomy R a Z splňující:*

(i) *Polynom Z je nulový nebo má stupeň menší než stupeň Q.*
(ii) *$P(x) = R(x)Q(x) + Z(x)$ pro všechna $x \in \mathbf{C}$.*

Pokud mají P a Q reálné koeficienty, mají i R a Z reálné koeficienty.

Důsledek. *Je-li P polynom a $\lambda \in \mathbf{C}$ je jeho kořen (tj. $P(\lambda) = 0$), pak existuje polynom R, pro který platí $P(x) = (x - \lambda)R(x)$ pro $x \in \mathbf{C}$.*

Věta 22 (o rozkladu na kořenové činitele). *Nechť $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ je polynom stupně n s reálnými koeficienty. Pak existují čísla $x_1, \ldots, x_n \in \mathbf{C}$ taková, že*

$$P(x) = a_n(x - x_1)\ldots(x - x_n), \qquad x \in \mathbf{R}.$$

Definice. Nechť P je polynom, $\lambda \in \mathbf{C}$ a $k \in \mathbf{N}$. Řekneme, že λ je **kořen násobnosti** k polynomu P, jestliže existuje polynom R, který splňuje $R(\lambda) \neq 0$ a $P(x) = (x - \lambda)^k R(x)$ pro $x \in \mathbf{C}$.

Poznámka. Je-li $z \in \mathbf{C}$, $z = a + ib$, $a, b \in \mathbf{R}$, pak $\overline{z} = a - ib$. Pro $z, w \in \mathbf{C}$ platí

- $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$;
- $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$;
- $\overline{z} = z$ právě když $z \in \mathbf{R}$.

Věta 23 (o kořenech polynomu). *Nechť P je polynom s reálnými koeficienty a $z \in \mathbf{C}$ je kořen P násobnosti $k \in \mathbb{N}$. Pak i $\overline{z}$ je kořen P násobnosti k.*

Věta 24 (o rozkladu polynomu). *Nechť $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ je polynom stupně n s reálnými koeficienty. Pak existují reálná čísla $x_1, \ldots, x_k$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_l$, $\beta_1, \ldots, \beta_l$ a přirozená čísla $p_1, \ldots, p_k$, $q_1, \ldots, q_l$ taková, že*

(i) *$P(x) = a_n(x - x_1)^{p_1} \ldots (x - x_k)^{p_k}(x^2 + \alpha_1 x + \beta_1)^{q_1} \ldots (x^2 + \alpha_l x + \beta_l)^{q_l}$,*
(ii) *žádné dva z mnohočlenů $x - x_1$, $x - x_2, \ldots, x - x_k$, $x^2 + \alpha_1 x + \beta_1, \ldots, x^2 + \alpha_l x + \beta_l$ nemají společný kořen,*
(iii) *mnohočleny $x^2 + \alpha_1 x + \beta_1, \ldots, x^2 + \alpha_l x + \beta_l$ nemají žádný reálný kořen.*

Věta 25 (o rozkladu na parciální zlomky). *Nechť P, Q jsou polynomy s reálnými koeficienty takové, že*

(i) *stupeň P je ostře menší než stupeň Q,*
(ii) $Q(x) = a_n(x-x_1)^{p_1} \dots (x-x_k)^{p_k}(x^2+\alpha_1 x+\beta_1)^{q_1} \dots (x^2+\alpha_l x+\beta_l)^{q_l}$,
(iii) a_n, $x_1, \dots x_k$, $\alpha_1, \dots, \alpha_l$, $\beta_1, \dots, \beta_l \in \mathbf{R}$, $a_n \neq 0$,
(iv) $p_1, \dots, p_k$, $q_1, \dots, q_l \in \mathbf{N}$,
(v) *žádné dva z mnohočlenů $x - x_1$, $x - x_2, \dots, x - x_k$, $x^2 + \alpha_1 x + \beta_1, \dots, x^2 + \alpha_l x + \beta_l$ nemají společný kořen,*
(vi) *mnohočleny $x^2+\alpha_1 x+\beta_1, \dots, x^2+\alpha_l x+\beta_l$ nemají reálný kořen.*

Pak existují jednoznačně určená čísla $A_1^1, \dots, A_{p_1}^1, \dots, A_1^k, \dots, A_{p_k}^k$, $B_1^1, C_1^1, \dots, B_{q_1}^1, C_{q_1}^1, \dots, B_1^l, C_1^l, \dots, B_{q_l}^l, C_{q_l}^l$ taková, že platí

$$\begin{aligned}\frac{P(x)}{Q(x)} &= \frac{A_1^1}{(x-x_1)^{p_1}} + \dots + \frac{A_{p_1}^1}{(x-x_1)} + \dots + \frac{A_1^k}{(x-x_k)^{p_k}} + \dots + \frac{A_{p_k}^k}{x-x_k} \\ &+ \frac{B_1^1 x + C_1^1}{(x^2+\alpha_1 x+\beta_1)^{q_1}} + \dots + \frac{B_{q_1}^1 x + C_{q_1}^1}{x^2+\alpha_1 x+\beta_1} + \dots \\ &+ \frac{B_1^l x + C_1^l}{(x^2+\alpha_l x+\beta_l)^{q_l}} + \dots + \frac{B_{q_l}^l x + C_{q_l}^l}{x^2+\alpha_l x+\beta_l}.\end{aligned}$$