XII. Diferenční rovnice

Definice. Nechť $k \in \mathbf{N}$.

(i) **Lineární diferenční rovnicí k-tého řádu s konstantními koeficienty** budeme rozumět rovnici

$$(*) \qquad y(n+k) + p_1 y(n+k-1) + \dots + p_k y(n) = a_n, \qquad n \in \mathbf{N},$$

kde neznámou je posloupnost $\{y(n)\}_{n=1}^{\infty}$, přičemž $p_1, \dots, p_k \in \mathbf{R}$, $p_k \neq 0$, a $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel.

(ii) **Řešením rovnice** (*) rozumíme každou posloupnost reálných čísel $\{y(n)\}_{n=1}^{\infty}$ splňující (*) pro každé $n \in \mathbf{N}$.

(iii) Pokud chceme, aby řešení rovnice (*) splňovalo podmínky

$$(**) \qquad y(1) = y_1, \dots, y(k) = y_k,$$

kde $y_1, \dots, y_k \in \mathbf{R}$ jsou dána (tzv. **počáteční podmínky**), pak hovoříme o **počáteční úloze**. **Řešením počáteční úlohy** (*),(**) rozumíme každou posloupnost reálných čísel $\{y(n)\}_{n=1}^{\infty}$, která splňuje rovnosti (**) a také splňuje (*) pro každé $n \in \mathbf{N}$.

(iv) Pokud $a_n = 0$ pro každé $n \in \mathbf{N}$, pak (*) má tvar

$$(***) \qquad y(n+k) + p_1 y(n+k-1) + \dots + p_k y(n) = 0, \qquad n \in \mathbf{N},$$

kterážto rovnice se nazývá **homogenní**.

Poznámka. Je možné uvedené rovnice zkoumat i v komplexním oboru. Definice jsou analogické, jen místo reálných čísel se uvažují čísla komplexní, neznámou je pak posloupnost komplexních čísel. Zřejmé analogie Větičky 1 a Vět 2 a 3 platí i v komplexním oboru (se stejným důkazem). Své analogie mají i Věty 4 a 5, ty jsou v komplexním oboru jednodušší.

Větička 1. *Počáteční úloha* (*), (**) *má právě jedno řešení.*

Pozorování. Nechť $k \in \mathbf{N}$, $p_1, \dots, p_k \in \mathbf{R}$. Pak zobrazení $L : \mathfrak{s} \to \mathfrak{s}$ definované předpisem

$$L\left(\{y(n)\}_{n=1}^{\infty}\right) = \{y(n+k) + p_1 y(n+k-1) + \dots + p_k y(n)\}_{n=1}^{\infty}$$

je lineární.

Věta 2. *Množina řešení homogenní rovnice* (***) *tvoří vektorový podprostor dimenze k prostoru $\mathfrak{s}$.*

Definice. Bázi prostoru řešení rovnice (***) se říká **fundamentální systém** řešení rovnice (***).

Věta 3. *Nechť posloupnosti* $\{y^1(n)\}_{n=1}^{\infty}$, $\{y^2(n)\}_{n=1}^{\infty}$, ... , $\{y^k(n)\}_{n=1}^{\infty}$ *tvoří fundamentální systém řešení (***). Nechť posloupnost* $\{z(n)\}_{n=1}^{\infty}$ *řeší (*). Potom posloupnost* $\{y(n)\}_{n=1}^{\infty}$ *řeší (*) právě když existují konstanty* $c_1, \ldots, c_k \in \mathbf{R}$ *takové, že*

$$y(n) = z(n) + c_1 y^1(n) + \cdots + c_k y^k(n)$$

pro každé $n \in \mathbf{N}$.

Definice. Charakteristickým polynomem rovnice (*) budeme rozumět polynom $\chi(\lambda) = \lambda^k + p_1\lambda^{k-1} + \cdots + p_{k-1}\lambda + p_k$.

Věta 4. *Nechť* $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ *jsou všechny navzájem různé reálné kořeny charakteristického polynomu rovnice (*) s násobnostmi* $r_1, \ldots, r_s$. *Nechť* $\xi_1, \ldots, \xi_l$ *jsou všechny navzájem různé komplexní kořeny tohoto polynomu s kladnou imaginární částí a násobnostmi* q_1, ... , q_l, *přičemž pro* $j = 1, \ldots, n$ *platí* $\xi_j = \mu_j(\cos\nu_j + i\sin\nu_j)$. *Pak následující posloupnosti tvoří fundamentální systém řešení homogenní rovnice (***).*

$$\begin{array}{cccc}
\{\lambda_1^n\}, & \{n\lambda_1^n\}, & \ldots & \{n^{r_1-1}\lambda_1^n\}, \\
\vdots & & & \\
\{\lambda_s^n\}, & \{n\lambda_s^n\}, & \ldots & \{n^{r_s-1}\lambda_s^n\}, \\
\{\mu_1^n\cos\nu_1 n\}, & \{n\mu_1^n\cos\nu_1 n\}, & \ldots & \{n^{q_1-1}\mu_1^n\cos\nu_1 n\}, \\
\{\mu_1^n\sin\nu_1 n\}, & \{n\mu_1^n\sin\nu_1 n\}, & \ldots & \{n^{q_1-1}\mu_1^n\sin\nu_1 n\}, \\
\vdots & & & \\
\{\mu_l^n\cos\nu_l n\}, & \{n\mu_l^n\cos\nu_l n\}, & \ldots & \{n^{q_l-1}\mu_l^n\cos\nu_l n\}, \\
\{\mu_l^n\sin\nu_l n\}, & \{n\mu_l^n\sin\nu_l n\}, & \ldots & \{n^{q_l-1}\mu_l^n\sin\nu_l n\}
\end{array}$$

Věta 5. *Nechť posloupnost* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *v rovnici (*) splňuje*

$$a_n = \alpha^n(P(n)\cos(\nu n) + Q(n)\sin(\nu n)),$$

kde $\alpha > 0$, $\nu \in \mathbf{R}$ *a* P, Q *jsou polynomy. Pak existuje řešení (*) ve tvaru*

$$y(n) = \alpha^n n^m(R(n)\cos(\nu n) + S(n)\sin(\nu n)),$$

kde R, S *jsou vhodné polynomy stupně ne většího než je větší ze stupňů polynomů* P, Q *a* $m \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ *udává jakou násobnost má číslo* $\alpha(\cos\nu + i\sin\nu)$ *jakožto kořen charakteristického polynomu rovnice (*)* ($m = 0$, *pokud toto číslo kořenem není).*

Poznámka. Pokud $a_n = \alpha^n P(n)$, tj. pokud $\nu = 0$, existuje řešení ve tvaru $y(n) = \alpha^n n^m R(n)$.