XVII.5 Stabilita stacionárních řešení autonomních soustav

Uvažujme soustavu

$$(*) \qquad \boldsymbol{x}'(t) = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}(t)),$$

kde $\boldsymbol{g}$ je zobrazení třídy $\mathcal{C}^1$ definované na otevřené množině $G \subset \mathbf{R}^n$ s hodnotami v $\mathbf{R}^n$.

Definice. Řekneme, že $\boldsymbol{a} \in G$ je **stacionární bod rovnice** (*), jestliže $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{o}$.

Definice. Řekneme, že stacionární bod $\boldsymbol{a} \in G$ rovnice (*) je

- (i) **stabilní**, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé maximální řešení $\boldsymbol{x}$ rovnice (*) splňující $\|\boldsymbol{x}(0)-\boldsymbol{a}\| < \delta$ platí:
  - $\boldsymbol{x}$ je definováno na otevřeném intervalu obsahujícím interval $\langle 0, +\infty)$;
  - $\|\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{a}\| < \varepsilon$ pro všechna $t \in \langle 0, +\infty)$;
- (ii) **nestabilní**, jestliže není stabilní;
- (iii) **asymptoticky stabilní**, jestliže je stabilní a existuje $\Delta > 0$ takové, že pro každé maximální řešení $\boldsymbol{x}$ rovnice (*) splňující $\|\boldsymbol{x}(0) - \boldsymbol{a}\| < \Delta$ platí $\lim_{t\to+\infty} \boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{a}$.

Věta 14. *Nechť $\mathbb{A} \in M(n \times n)$.*

- (i) *Stacionární bod $\boldsymbol{o}$ rovnice $\boldsymbol{x}' = \mathbb{A}\boldsymbol{x}$ je asymptoticky stabilní, právě když $\operatorname{Re}\lambda < 0$ pro každé vlastní číslo λ matice $\mathbb{A}$.*
- (ii) *Stacionární bod $\boldsymbol{o}$ rovnice $\boldsymbol{x}' = \mathbb{A}\boldsymbol{x}$ je stabilní, právě když pro každé vlastní číslo λ matice $\mathbb{A}$ platí buď $\operatorname{Re}\lambda < 0$, nebo $\operatorname{Re}\lambda = 0$ a násobnost vlastního čísla λ je rovna $n-h(\lambda\mathbb{I}-\mathbb{A})$.*

Věta 15 (Ljapunovova věta). *Nechť $\boldsymbol{a}$ je stacionární bod rovnice (*). Označme*

$$\mathbb{A} = \left(\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{a})\right)_{\substack{i=1..n\\ j=1..n}}.$$

Pak platí:

- (i) *Jestliže pro každé vlastní číslo λ matice $\mathbb{A}$ platí $\operatorname{Re}\lambda < 0$ (tj. je-li $\boldsymbol{o}$ asymptoticky stabilní pro $\boldsymbol{x}' = \mathbb{A}\boldsymbol{x}$), pak $\boldsymbol{a}$ je asymptoticky stabilní stacionární bod rovnice (*).*
- (ii) *Jestliže alespoň jedno vlastní číslo matice $\mathbb{A}$ má kladnou reálnou část, pak je $\boldsymbol{a}$ nestabilní stacionární bod rovnice (*).*