# XV. Lineární rovnice prvního řádu

- **Lineární diferenciální rovnice prvního řádu** je rovnice tvaru
$$y' + p(x)y = q(x),$$
kde $p$ a $q$ jsou funkce spojité na daném intervalu $(a, b)$. Je-li funkce $q$ nulová, mluvíme o **homogenní rovnici**.
- Zobrazení
$$L\colon y \mapsto y' + p(x)y$$
je lineární zobrazení prostoru $\mathcal{C}^1(a, b)$ do prostoru $\mathcal{C}(a, b)$. Řešení lze tedy rozdělit na řešení homogenní rovnice a hledání partikulárního řešení a použít Větu IX.6.
- Homogenní rovnice je rovnicí se separovanými proměnnými. Množina všech řešení má tvar
$$\{cy_h\colon c \in \mathbf{R}\},$$
kde $y_h \in \mathcal{C}^1(a, b)$ je nějaká funkce nenabývající hodnoty 0. Je to tedy vektorový podprostor prostoru $\mathcal{C}^1(a, b)$ dimenze 1.
- **Variace konstanty.** Partikulární řešení lze hledat a najít ve tvaru
$$y(x) = c(x)y_h(x),$$
kde $y_h$ je nějaké nenulové řešení homogenní rovnice (tj. $\{y_h\}$ je báze prostoru řešení homogenní rovnice).
- **Metoda integračního faktoru.** Rovnici lze přímo řešit tak, že ji vynásobíme funkcí $e^{P(x)}$, kde $P$ je primitivní funkce k $p$, a pak levou stranu vyjádříme jako derivaci součinu.
- **Existence a jednoznačnost řešení.** Pro každé $x_0 \in (a, b)$ a každé $y_0 \in \mathbf{R}$ existuje právě jedno maximální řešení $y$, které splňuje $y(x_0) = y_0$. Navíc je $y$ definováno na celém $(a, b)$.