XVI.3 Metoda variace konstant

Uvažujme rovnici

$$(*)\qquad y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = f(t),$$

kde $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbf{R}$ a f je funkce spojitá na daném intervalu (a, b).

Definice. Nechť funkce $y_1, \ldots, y_n$ tvoří fundamentální systém řešení homogenní rovnice. Pak matici (či přesněji maticovou funkci)

$$\mathbb{U}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) & y_2(t) & \ldots & y_n(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) & \ldots & y_n'(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(t) & y_2^{(n-1)}(t) & \ldots & y_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$$

nazýváme **fundamentální maticí** homogenní rovnice.

Větička 6. *Nechť $\mathbb{U}(t)$ je fundamentální maticí homogenní rovnice. Pak matice $\mathbb{U}(t)$ je regulární pro každé $t \in \mathbf{R}$.*

Věta 7 (variace konstant). *Nechť funkce $y_1, \ldots, y_n$ tvoří fundamentální systém řešení homogenní rovnice. Pokud funkce $c_1, \ldots, c_n$ splňují soustavu rovnic*

$$\begin{aligned} c_1' y_1 + \ldots + \quad c_n' y_n &= 0, \\ &\vdots \\ c_1' y_1^{(n-2)} + \cdots + c_n' y_n^{(n-2)} &= 0, \\ c_1' y_1^{(n-1)} + \cdots + c_n' y_n^{(n-1)} &= f \end{aligned}$$

na intervalu (a, b), pak funkce $y(t) = c_1(t)y_1(t) + \cdots + c_n(t)y_n(t)$, $t \in (a, b)$ je řešením rovnice $(*)$.