XVII.2 Soustavy lineárních diferenciálních rovnic

Uvažujme soustavu

$$
\begin{aligned}
x_1'(t) &= a_{11}(t)x_1(t) + a_{12}(t)x_2(t) + \dots, + a_{1n}(t)x_n(t) + b_1(t),\\
x_2'(t) &= a_{21}(t)x_1(t) + a_{22}(t)x_2(t) + \dots, + a_{2n}(t)x_n(t) + b_2(t),\\
&\vdots\\
x_n'(t) &= a_{n1}(t)x_1(t) + a_{n2}(t)x_2(t) + \dots, + a_{nn}(t)x_n(t) + b_n(t),
\end{aligned}
\tag{4}
$$

kde funkce a_{ij}, $i,j \in \{1,\dots,n\}$ a b_j, $j \in \{1,\dots,n\}$ jsou spojité na zadaném intervalu (α,β). Takovouto soustavu nazýváme **soustavou lineárních diferenciálních rovnic prvního řádu**.

Pokud označíme

$$\mathbb{A}(t) = (a_{ij}(t))_{\substack{i=1,\dots,n\\ j=1,\dots,n}}, \qquad \boldsymbol{b}(t) = (b_j(t))_{j=1,\dots,n},$$

můžeme soustavu (4) zapsat ve vektorovém tvaru

$$\boldsymbol{x}'(t) = \mathbb{A}(t)\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{b}(t). \tag{5}$$

Pak $\mathbb{A}$ je maticová funkce (tj. $\mathbb{A} : (\alpha,\beta) \to M(n \times n)$) a $\boldsymbol{b}$ je vektorová funkce $\boldsymbol{b} : (\alpha,\beta) \to \mathbf{R}^n = M(n \times 1)$.

Je-li funkce $\boldsymbol{b}$ nulová, mluvíme o **homogenní soustavě**.

Poznámka. Zobrazení $L : C^1((\alpha,\beta),\mathbf{R}^n) \to C((\alpha,\beta),\mathbf{R}^n)$ definované předpisem

$$L(\boldsymbol{x})(t) = \boldsymbol{x}'(t) - \mathbb{A}(t)\boldsymbol{x}(t), \qquad t \in (\alpha,\beta), \boldsymbol{x} \in C^1((\alpha,\beta),\mathbf{R}^n),$$

je lineární zobrazení vektorového prostoru $C^1((\alpha,\beta),\mathbf{R}^n)$ do vektorového prostoru $C((\alpha,\beta),\mathbf{R}^n)$.

Věta 4. *Mějme soustavu (4). Pro každé $t_0 \in (\alpha,\beta)$ a každé $\boldsymbol{x}^0 \in \mathbf{R}^n$ existuje právě jedno maximální řešení $\boldsymbol{x}$ soustavy (4) splňující počáteční podmínku $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}^0$. Toto řešení je navíc definované na celém intervalu (α,β).*

Větička 5.

(i) *Maximální řešení homogenní soustavy tvoří vektorový podprostor prostoru $C^1((\alpha,\beta),\mathbf{R}^n)$.*

(ii) *Nechť $\boldsymbol{x}^p$ je nějaké řešení soustavy (4). Pak každé její řešení má tvar $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^p + \boldsymbol{x}^h$, kde $\boldsymbol{x}^h$ je nějaké řešení homogenní soustavy.*

Věta 6. *Dimenze vektorového prostoru maximálních řešení homogenní soustavy je rovna n.*

Bázi prostoru řešení homogenní soustavy nazýváme **fundamentální systém řešení**. Nechť funkce $\boldsymbol{x}^1,\ldots,\boldsymbol{x}^n$ tvoří fundamentální systém řešení homogenní soustavy. Pak maticovou funkci

$$\Phi(t) = (\boldsymbol{x}^1(t),\ldots,\boldsymbol{x}^n(t)), \qquad t \in (\alpha,\beta),$$

nazýváme **fundamentální maticí soustavy**.

Věta 7. *Nechť Φ je fundamentální matice soustavy (4).*

(i) *Vektorová funkce $\boldsymbol{x}$ je řešením homogenní soustavy, právě když existuje vektor $\boldsymbol{c} \in \mathbf{R}^n = M(n\times 1)$ takový, že*

$$\boldsymbol{x}(t) = \Phi(t)\cdot\boldsymbol{c}, \qquad t \in (\alpha,\beta).$$

(ii) *Pro každé $t \in (\alpha,\beta)$ je matice $\Phi(t)$ regulární.*

Věta 8 (variace konstant). *Nechť Φ je fundamentální matice soustavy (4). Pak maximální řešení soustavy (4) splňující počáteční podmínku $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}^0$ je dáno vzorcem*

$$\boldsymbol{x}(t) = \Phi(t)\Phi(t_0)^{-1}\boldsymbol{x}^0 + \Phi(t)\int_{t_0}^{t} \Phi(s)^{-1}\boldsymbol{b}(s)\,\mathrm{d}s, \qquad t \in (\alpha,\beta).$$