```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%% POJMY, JEJICHŽ ZNALOST SE OČEKÁVÁ
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

množina komplexních čísel
algebraický zápis komplexního čísla
maticový zápis komplexního čísla
reálná část komplexního čísla
imaginární část komplexního čísla
absolutní hodnota komplexního čísla
komplexně sdružené číslo
metrika na $\mathbb{C}$
okolí bodu v $\mathbb{C}$
otevřená množina v $\mathbb{C}$
uzavřená množina v $\mathbb{C}$
konvergence posloupnosti v $\mathbb{C}$
spojitost funkce komplexní proměnné
limita funkce komplexní proměnné
komplexní funkce reálné proměnné
derivace komplexní funkce reálné proměnné
primitivní funkce ke komplexní funkci reálné proměnné
integrál z komplexní funkce reálné proměnné (Newtonův, Riemannův)
komplexní funkce komplexní proměnné
derivace podle komplexní proměnné
funkce holomorfní na množině
celá funkce
mocninná řada o středu a
poloměr konvergence mocninné řady
kruh konvergence mocninné řady
exponenciální funkce
funkce sinus
funkce kosinus
funkce hyperbolický sinus
funkce hyperbolický kosinus
hlavní hodnota argumentu
hlavní hodnota logaritmu
množina $\mathrm{Log}(z)$
množina $\mathrm{Arg}(z)$
obecná mocnina $M_a(z)$
hlavní hodnota obecné mocniny
křivka v $\mathbb{C}$
obraz křivky
uzavřená křivka
opačná křivka
spojení dvou křivek
délka křivky
kladně orientovaná kružnice
orientovaná úsečka
cesta (po částech hladká křivka)
integrál podél cesty
primitivní funkce ke komplexní funkci komplexní proměnné
souvislá množina
oblast
přírůstek logaritmu funkce podél křivky
index bodu ke křivce
komponenta množiny
trojúhelník
obvod trojúhelníka
hvězdovitá množina

p-násobný kořen holomorfní funkce
hromadný bod množiny
izolovaná množina
množina $\overline{\mathbb{C}}$
okolí bodu ∞
limita a spojitost v $\overline{\mathbb{C}}$
stereografická projekce
metrika na $\overline{\mathbb{C}}$
prstencové okolí
odstranitelná singularita (i v ∞)
pól násobnosti p (i v ∞)
podstatná singularita (i v ∞)
funkce holomorfní v ∞
kořen násobnosti p v ∞
Laurentova řada o středu a
regulární část Laurentovy řady
hlavní část Laurentovy řady
konvergence hlavní části Laurentovy řady
součet hlavní části Laurentovy řady
konvergence Laurentovy řady
součet Laurentovy řady
mezikruží o středu a
mezikruží konvergence Laurentovy řady
reziduum funkce v bodě
řetězec
cykl
obraz řetězce
délka řetězce
integrál podél řetězce
index bodu vzhledem k cyklu
ekvivalentní řetězce
nabývání hodnoty p-násobně

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% VĚTY, JEJICHŽ ZNALOST SE OČEKÁVÁ %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Vysvětlivky:
%  číslo na konci řádku - číslo věty podle přednášky
%  značka před číslem:
%          *   věta se nebude explicitně zkoušet, nicméně
%              se předpokládá její znalost včetně základní
%              myšlenky důkazu, pokud byla dokázána
%          +   věta má statut těžké věty a jako taková
%              se bude zkoušet i s důkazem
%  bez značky  věta má statut lehké věty a jako taková se
%              bude zkoušet i s důkazem
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

limita a spojitost komplexní funkce reálné proměnné % * I.1
odhad absolutní hodnoty integrálu z komplexní funkce % I.2
Cauchy-Riemannovy podmínky % I.3
konvergence mocninných řad % * II.1
derivování a integrování mocninných řad % * II.2
vlastnosti exponenciální funkce % + II.3
vlastnosti goniometrických a hyperbolických funkcí % * II.4
vlastnosti logaritmu a argumentu % II.5
vlastnosti obecné mocniny % * II.6
vlastnosti křivkového integrálu % III.1 a III.2
výpočet křivkového integrálu pomocí primitivní funkce % III.3
záměna křivkového integrálu a limity, spojitost a derivace dle parametru % * III.4
charakterizace oblasti % + III.5
existence primitivní funkce a křivkový integrál % + III.6
existence spojité větve logaritmu podél křivky % * III.7
existence spojité větve logaritmu holomorfní funkce podél cesty % III.7 (dokázaná část)
přírůstek logaritmu a index bodu vzhledem ke křivce % * III.8
komponenty otevřené množiny % III.9
vlastnosti indexu bodu ke křivce % III.10
propichovací věta % * poznámka(3) za III.10
Cauchyova věta pro trojúhelník % + III.11
Cauchyova věta pro hvězdovitou množinu % III.12
Cauchyův vzorec pro kruh % III.13
vlastnost průměru pro holomorfní funkce % * Důsledek III.13
Cauchyův vzorec pro vyšší derivace % III.14
vyjádření holomorfní funkce mocninnou řadou % III.15
Cauchyovy odhady koeficientů mocninné řady % III.16
Liouvilleova věta % III.17
základní věta algebry % III.18
rozklad polynomu na kořenové činitele % * Důsledek III.18
násobnost kořenů holomorfních funkcí % III.19
věta o jednoznačnosti % + III.20
princip maxima modulu % + III.21
Weierstrassova věta o limitě posloupnosti holomorfních funkcí % + III.22
Morerova věta % III.23
vlastnosti stereografické projekce % * IV.1
Casorati-Weierstrassova věta % IV.2
Velká Picardova věta % * Poznámka za IV.2
konvergence Laurentovy řady % IV.3
Cauchyův vzorec pro mezikruží % IV.4
Laurentův rozvoj holomorfní funkce % + IV.5
Laurentův rozvoj a izolované singularity % IV.6
reziduová věta % IV.7
metody výpočtu reziduí % * IV.8
Jordanovo lemma % IV.9

Lemma IV.10 % * IV.10
spojitost derivačního podílu % V.1
globální Cauchyova věta % + V.2
obecná reziduová věta % V.3
princip argumentu % V.4
Rouchéova věta % + V.5
o násobnosti vzorů při holomorfní funkci % V.6
věta o otevřeném zobrazení % V.7
lokální existence inverzní funkce % *V.8
o prosté holomorfní funkci % * V.9

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%% DALŠÍ OTÁZKY %%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

1) Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je oblast, $n \in \mathbb{N}$ a $f : \Omega \to \mathbb{C}$ splňuje $f^{(n)} = 0$ na Ω. Dokažte, že pak f je polynom stupně menšího než n.

2) Nechť $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ a $0 < r \leq |a|$. Dokažte, že na $U(a, r)$ existuje holomorfní funkce L, pro kterou platí $\exp(L(z)) = z$, $z \in U(a, r)$. Čemu se rovná derivace funkce L?

3) Nechť f je celá funkce, která nenabývá žádné hodnoty z množiny $U(a, r)$ pro nějaké $a \in \mathbb{C}$ a $r > 0$. Dokažte, že f je konstatní na $\mathbb{C}$.

4) Nechť f je celá funkce, která nenabývá žádné hodnoty z nějaké polopřímky (tj. z množiny $\{a + th : t \in [0, +\infty)\}$, kde $a, h \in \mathbb{C}$, $h \neq 0$). Dokažte, že f je konstantní na $\mathbb{C}$.

5) Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je otevřená a $M \subset \Omega$ je množina izolovaná v Ω. Nechť f je spojitá na Ω a holomorfní na $\Omega \setminus M$. Dokažte, že f je holomorfní na Ω.

6) Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je oblast, f nekonstantní holomorfní funkce na Ω. Nechť funkce $|f|$ má v bodě $a \in \Omega$ lokální minimum. Dokažte, že $f(a) = 0$.

7) Dokažte, že funkce sinus je prostá na množině $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})\}$ a že inverzní funkce je holomorfní.

8) Dokažte, že funkce sinus je prostá na $U(\frac{\pi}{4}, r)$ pro nějaké $r > 0$ a že inverzní funkce je holomorfní. Čemu se rovná derivace této inverzní funkce?

9) Nechť $M \subset \overline{\mathbb{C}}$ je konečná množina, f je holomorfní na $\overline{\mathbb{C}} \setminus M$ a v každém bodě množiny M má pól. Dokažte, že f je racionální funkce. Vyjádřete stupeň čitatele a stupeň jmenovatele (s využitím násobností jednotlivých pólů).

10) Nechť funkce f má v bodě $a \in \mathbb{C}$ podstatnou singularitu. Musí mít funkce $\frac{1}{f}$ v bodě a izolovanou singularitu? A pokud ji tam má, o jaký typ se může jednat?

11) Nechť funkce f má v bodě $a \in \mathbb{C}$ podstatnou singularitu. Dokažte, že existuje $c \in \mathbb{C}$ takové, že funkce $\frac{1}{f-c}$ nemá v bodě a izolovanou singularitu.

12) Dokažte, že funkce tangens je prostá na $U(0, r)$ pro nějaké $r > 0$ a že inverzní funkce je holomorfní. Čemu se rovná derivace této inverzní funkce?

13) Nechť $z, w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Jaký je vztah mezi $\log(zw)$ a $\log(z) + \log(w)$?

14) Nechť $z, w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Jaký je vztah mezi množinami $\operatorname{Log}(zw)$ a $\operatorname{Log}(z) + \operatorname{Log}(w) = \{u + v : u \in \operatorname{Log}(z), v \in \operatorname{Log}(w)\}$?

15) Nechť $a, b, c \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$. Jaký je vztah mezi $m_b(a) \cdot m_c(a)$ a $m_{b+c}(a)$? A mezi $m_b(m_c(a))$, $m_c(m_b(a))$ a $m_{bc}(a)$?

16) Nechť $a, b, c \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$. Jaký je vztah mezi množinami $M_{bc}(a)$, $M_b(M_c(a)) = \{z \in \mathbb{C} : \exists w \in M_c(a) : z \in M_b(w)\}$ a $M_c(M_b(a))$?

17) Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je otevřená hvězdovitá množina. Dokažte, že pro každou funkci f holomorfní na Ω, která na Ω nenabývá hodnoty 0, existuje funkce L holomorfní na Ω, pro kterou platí $f(z) = e^{L(z)}$, $z \in \Omega$. Čemu se rovná derivace funkce L?

18) Nechť f, g jsou dvě celé funkce, pro které platí $|f(z)| \leq |g(z)|$ pro všechna $z \in \mathbb{C}$. Dokažte, že funkce f je násobkem funkce g.

19) Rozviňte funkci log do mocninné řady o středu 1 a určete kruh konvergence.

20) Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je oblast a posloupnost holomorfních funkcí f_n konverguje lokálně stejnoměrně na Ω k funkci f. Předpokládejme, že žádná z funkcí f_n na Ω nenabývá hodnoty 0 a že f není konstantní. Dokažte, že f na Ω nenabývá hodnoty 0. (Použijte Rouchéovu větu.)

21) Nechť f, g jsou funkce holomorfní v nějakém okolí bodu a, pro které platí $f(a) = g(a) = 0$ a funkce g není konstantní na okolí bodu a. Dokažte, že $\lim_{z \to a} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \to a} \frac{f'(z)}{g'(z)}$.

22) Nechť funkce f, g jsou holomorfní v nějakém prstencovém okolí bodu a a v bodě a mají obě pól. Dokažte, že $\lim_{z \to a} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \to a} \frac{f'(z)}{g'(z)}$.