Řešení příkladu III/2

Mějme rovnici
$$y' = \sin(x+y).$$
Provedeme substituci „$z = x + y$“, neboli „$y = z - x$“. To znamená, že budeme řešení hledat ve tvaru $y(x) = z(x) - x$, kde z je nová neznámá funkce. Tak dostaneme rovnici pro z

$$z' - 1 = \sin z, \quad \text{neboli} \quad z' = 1 + \sin z.$$

To je rovnice se separovanými proměnnými (dokonce autonomní). Řešíme standardní metodou ($h(x) = 1$, $g(z) = 1 + \sin z$):
`Krok 1.` Řešení budeme hledat na $\mathbb{R}$.
`Krok 2.` Stacionární řešení jsou $z(x) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $x \in \mathbb{R}$ (kde $k \in \mathbb{Z}$ je libovolné).
`Krok 3.` Maximální otevřené intervaly, kde funkce g je spojitá a nenulová, jsou $(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3}{2}\pi + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.
`Krok 4.` Hledáme řešení s hodnotami v některém z intervalů z třetího kroku. Ta splňují

$$\frac{z'}{1+\sin z} = 1.$$

Primitivní funkce k pravé straně je x, potřebujeme spočítat primitivní funkci k levé straně. K tomu je třeba spočítat integrál $\int \frac{1}{1+\sin z}\,\mathrm{d}z$ na každém z intervalů z 3. kroku. Protože funkce je 2π-periodická, stačí výpočet provést na jednom z intervalů, například vezmeme interval $(-\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi)$. Takovýto integrál lze pomocí substituce $u = \operatorname{tg}\frac{z}{2}$ nebo $u = \operatorname{cotg}\frac{z}{2}$ převést na integrál z racionální funkce. První substituce funguje na intervalech $(-\pi + 2k\pi, \pi + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$, druhá na intervalech $(2k\pi, 2\pi + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$. Zvolíme-li první z nich, bude tedy fungovat na $(-\frac{\pi}{2}, \pi)$ a na $(\pi, \frac{3}{2}\pi)$. Po provedení substituce standardním způsobem dostaneme integrál z racionální funkce:

$$\int \frac{1}{1+\frac{2u}{1+u^2}} \cdot \frac{2}{1+u^2}\,\mathrm{d}u = \int \frac{2}{(1+u)^2}\,\mathrm{d}u \overset{c}{=} -\frac{2}{1+u}$$

na $(-\infty, -1)$ a na $(-1, +\infty)$, tedy

$$\int \frac{1}{1+\sin z}\,\mathrm{d}z \overset{c}{=} -\frac{2}{1+\operatorname{tg}\frac{z}{2}}$$

na $(-\frac{\pi}{2}, \pi)$ a na $(\pi, \frac{3}{2}\pi)$. Protože však potřebujeme primitivní funkci na celém $(-\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi)$, je potřeba výsledky na obou intervalech slepit. To lze udělat následovně. Definujme funkci

$$\varphi(z) = \begin{cases} -\frac{2}{1+\operatorname{tg}\frac{z}{2}} & z \in (-\frac{\pi}{2}, \pi) \cup (\pi, \frac{3}{2}\pi), \\ 0 & z = \pi. \end{cases}.$$

Protože φ je spojitá na $(-\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi)$ (limita v bodě π z obou stran je nula) a je primitivní funkcí na $(-\frac{\pi}{2}, \pi)$ i na $(\pi, \frac{3}{2}\pi)$, je primitivní funkcí i na $(-\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi)$.
Protože funkce $\frac{1}{1+\sin z}$ je 2π-periodická, primitivní funkci na $(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3}{2}\pi + 2k\pi)$ můžeme získat jako $\varphi(z - 2k\pi)$. Řešení s hodnotami v intervalu $(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3}{2}\pi + 2k\pi)$ tedy splňují rovnici

$$\varphi(z - 2k\pi) = x + c$$

pro nějaké $c \in \mathbb{R}$. Protože funkce φ má v bodě $-\frac{\pi}{2}$ zprava limitu $-\infty$ a v bodě $\frac{3}{2}\pi$ zprava limitu $+\infty$, zobrazuje interval $(-\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi)$ na $\mathbb{R}$. Stejně tak funkce $\varphi(z - 2k\pi)$ zobrazuje interval $(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3}{2}\pi + 2k\pi)$. Řešení budou tedy definována na $\mathbb{R}$ (díky prvnímu kroku) a budou dána vzorcem
$$z(x) = \varphi^{-1}(x + c) + 2k\pi, \quad x \in \mathbb{R}, (c \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}).$$

Pro explicitní vyjádření je třeba spočítat φ^{-1}. Počítejme tedy: Pro $x = 0$ je $\varphi^{-1}(x) = \pi$. Dále, funkce φ zobrazuje interval $(-\frac{\pi}{2}, \pi)$ na $(-\infty, 0)$ a interval $(\pi, \frac{3}{2}\pi)$ na $(0, +\infty)$. Pro $x < 0$ rovnici tedy

$$-\frac{2}{1 + \operatorname{tg}\frac{z}{2}} = x$$

upravíme na

$$\operatorname{tg}\frac{z}{2} = -\frac{2}{x} - 1,$$

neboli

$$z = 2\operatorname{arctg}(-\frac{2}{x} - 1),$$

protože pro $z \in (-\frac{\pi}{2}, \pi)$ je $\frac{z}{2} \in (-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}) \subset (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ a inverzní funkcí k funkci tg zúžené na $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ je funkce arctg. Podobně pro $x > 0$ upravujeme

$$\begin{aligned} -\frac{2}{1 + \operatorname{tg}\frac{z}{2}} &= x \\ \operatorname{tg}\frac{z}{2} &= -\frac{2}{x} - 1 \\ z &= 2\operatorname{arctg}(-\frac{2}{x} - 1) + 2\pi, \end{aligned}$$

protože pro $z \in (\pi, \frac{3}{2}\pi)$ je $\frac{z}{2} \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3}{4}\pi) \subset (\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi)$ a inverzní funkcí k funkci tg zúžené na $(\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi)$ je funkce arctg $+\pi$. Celkem tedy máme

$$\varphi^{-1}(x) = \begin{cases} 2\operatorname{arctg}(-\frac{2}{x} - 1) & x < 0, \\ \pi & x = 0, \\ 2\operatorname{arctg}(-\frac{2}{x} - 1) + 2\pi & x > 0. \end{cases}$$

Dosazením získáme vzorec pro řešení (s použitím faktu, že arctg je lichá funkce)

$$z(x) = \begin{cases} -2\operatorname{arctg}(\frac{2}{x+c} + 1) + 2k\pi & x \in (-\infty, -c), \\ \pi + 2k\pi & x = -c, \\ -2\operatorname{arctg}(\frac{2}{x+c} + 1) + 2\pi + 2k\pi & x \in (-c, +\infty); \end{cases}$$

kde $k \in \mathbb{Z}$ a $c \in \mathbb{R}$ jsou libovolné konstanty.

`Krok 5.` Protože řešení nalezená ve 4. kroku jsou definována na $\mathbb{R}$, jsou maximální. Maximální řešení jsou tedy jednak stacionární řešení z 2. kroku a jednak řešení z 4. kroku.

`Zpět k původní rovnici.` Maximální řešení původní rovnice jsou tedy tato:

$$y(x) = -x - \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad x \in \mathbb{R}; \quad \text{a}$$

$$y(x) = \begin{cases} -x - 2\operatorname{arctg}(\frac{2}{x+c} + 1) + 2k\pi & x \in (-\infty, -c), \\ c + \pi + 2k\pi & x = -c, \\ -x - 2\operatorname{arctg}(\frac{2}{x+c} + 1) + 2\pi + 2k\pi & x \in (-c, +\infty); \end{cases}$$

kde $k \in \mathbb{Z}$ a $c \in \mathbb{R}$ jsou libovolné konstanty.