IV.1 Konformní zobrazení a konformní ekvivalence

Definice.

- Pro $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ označme $A(z) = \frac{z}{|z|}$.
- Nechť $f : U(a, R) \to \mathbb{C}$, kde $a \in \mathbb{C}$ a $r > 0$. Řekneme, že zobrazení f **zachovává úhly** v bodě a, pokud pro každé $t \in \mathbb{R}$ existuje vlastní limita
$$v(t) = \lim_{r \to 0+} A(f(a + re^{it}) - f(a))$$
a pro každá $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ platí
$$\frac{v(t_1)}{v(t_2)} = \frac{e^{it_1}}{e^{it_2}}.$$

Poznámka. Zobrazení f zachovává úhly v bodě a, právě když pro každé $t \in \mathbb{R}$ existuje vlastní limita

$$\lim_{r \to 0+} A(f(a + re^{it}) - f(a))e^{-it},$$

a její hodnota nezávisí na t.

Větička 1. *Nechť f je komplexní funkce definovaná na $U(a, R)$.*

(i) *Jestliže $f'(a)$ existuje a je různá od 0, pak f zachovává úhly v bodě a.*

(ii) *Jestliže f zachovává úhly v bodě a a funkce $\tilde{f}(x, y) = (\operatorname{Re} f(x + iy), \operatorname{Im} f(x + iy))$ má v bodě $(\operatorname{Re} a, \operatorname{Im} a)$ nenulový totální diferenciál, pak existuje $f'(a)$ (a je různá od 0).*

(iii) *Je-li f holomorfní v bodě a a $f'(a) = 0$, pak f nezachovává úhly v bodě a.*

Definice. Nechť $G \subset \overline{\mathbb{C}}$ je otevřená. Řekneme, že zobrazení $f : G \to \overline{\mathbb{C}}$ je **konformní** na G, je-li meromorfní a prosté.

Poznámky.

(1) Je-li f konformní na G, $a \in G \cap \mathbb{C}$ a $f(a) \in \mathbb{C}$, pak $f'(a) \neq 0$.

(2) Je-li f konformní na G, pak má nejvýše jeden pól, a ten je násobnosti 1.

(3) Je-li $G \subset \mathbb{C}$ otevřená, $f \in H(G)$ splňující $f'(z) \neq 0$ pro všechna $z \in G$, pak f je na G lokálně konformní, tj. konformní v nějakém okolí každého bodu.

(4) Je-li f konformní na G, pak zachovává úhly v každém bodě G: Je-li $a \in \mathbb{C}$ a $f(a) \in \mathbb{C}$, pak je zachovávání úhlů definováno výše. V ostatních případech je definice analogická, s tím že:
   (a) je-li $a \in \mathbb{C}$ a $f(a) = \infty$, pak $v(t) = \lim_{r \to 0+} \frac{1}{A(f(a+re^{it}))}$;
   (b) je-li $a = \infty$ a $f(a) \in \mathbb{C}$, pak $v(t) = \lim_{r \to \infty} A(f(re^{-it}) - f(\infty))$;
   (c) je-li $a = \infty$ a $f(a) = \infty$, pak pak $v(t) = \lim_{r \to \infty} \frac{1}{A(f(re^{-it}))}$.

Větička 2. *f je konformní na $\overline{\mathbb{C}}$, právě když na $\overline{\mathbb{C}}$ platí $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, kde $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ splňují $ad - bc \neq 0$.*

Větička 3. *Je-li f konformní na $\mathbb{C}$, pak lze konformně rozšířit na $\overline{\mathbb{C}}$, a má tedy tvar z Větičky 2.*

Důsledek. *Je-li $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ konformní, pak $f(z) = az + b$ pro nějaká $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$.*

Lemma 4 (Schwarzovo). *Nechť f je holomorfní na $U(0,1)$ splňující $f(0) = 0$ a $|f(z)| \leq 1$ pro všechna $z \in U(0,1)$. Pak platí*

- $|f(z)| \leq |z|$ *pro každé* $z \in U(0,1)$,
- $|f'(0)| \leq 1$.

Jestliže navíc buď $|f'(0)| = 1$ nebo alespoň pro jedno $z \in P(0,1)$ platí $|f(z)| = |z|$, pak existuje takové $\alpha \in \mathbb{C}$, $|\alpha| = 1$, že $f(z) = \alpha z$ pro všechna $z \in U(0,1)$.

Věta 5 (Riemannova). *Nechť $G \subsetneqq \mathbb{C}$ je oblast, pro kterou $\overline{\mathbb{C}} \setminus G$ je souvislá. Pak existuje konformní zobrazení G na $U(0,1)$.*

Definice. Oblasti $G_1, G_2 \subset \mathbb{C}$ se nazývají **konformně ekvivalentní**, jestliže existuje konformní zobrazení G_1 na G_2.

Poznámka. Z Věty 4 plyne, že každé dvě oblasti $G_1, G_2 \subsetneqq \mathbb{C}$ se souvislým doplňkem v $\overline{\mathbb{C}}$ (ekvivalentně, jednoduše souvislé) jsou konformně ekvivalentní.

Věta 6. *Mezikruží $P(a_1, r_1, R_1)$ a $P(a_2, r_2, R_2)$ (kde $a_j \in \mathbb{C}$, $0 < r_j < R_j < +\infty$ pro $j = 1, 2$) jsou konformně ekvivalentní, právě když $\frac{R_1}{r_1} = \frac{R_2}{r_2}$.*

Poznámka. Z Důkazu Věty 6 plyne následující tvrzení:

Nechť $1 < R < +\infty$. Pak každé konformní zobrazení mezikruží $U(0,1,R)$ na sebe je buď tvaru $f(z) = \alpha z$, kde $|\alpha| = 1$, nebo tvaru $f(z) = \frac{\alpha R}{z}$, kde $|\alpha| = 1$.