IV.2 Hraniční chování holomorfních funkcí

Věta 7 (o hraničním chování harmonických funkcí).

(1) *Nechť f je omezená harmonická funkce na $U(0,1)$. Pak existuje právě jedna $f^* \in L^\infty(\mathbb{T})$, pro kterou $P[f^*] = f$.*
(2) *Nechť $g \in L^1(\mathbb{T})$. Pak pro skoro všechna $t \in [0, 2\pi)$ (vzhledem k Lebesgueově míře) platí $g(t) = \lim_{r \to 1-} P[g](re^{it})$.*

Důsledek (Fatouova věta). *Nechť f je omezená holomorfní funkce na $U(0,1)$. Pak pro skoro všechna $t \in [0, 2\pi)$ existuje limita $f^*(e^{it}) = \lim_{r \to 1-} f(re^{it})$. Pak $f^* \in L^\infty(\mathbb{T})$, $\|f^*\|_\infty = \sup\{|f(z)| : z \in U(0,1)\}$ a pro každé $z \in U(0,1)$ platí*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f^*(e^{it})}{e^{it} - z} e^{it} \, \mathrm{d}t.$$

Důsledek. *Nechť f je omezená holomorfní funkce na $U(0,1)$ a f^* je jako ve Fatouově větě. Pokud $f^* = 0$ skoro všude na nějakém oblouku, pak $f = 0$ na $U(0,1)$.*

Lemma 8. *Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je omezená jednoduše souvislá oblast a f je konformní zobrazení G na $U(0,1)$. Nechť $\varphi : [0,1] \to \mathbb{C}$ je křivka splňující $\varphi([0,1)) \subset G$ a $\varphi(1) \in \partial G$. Pak existuje limita $\lim_{t \to 1-} f(\varphi(t))$ a její hodnota leží na jednotkové kružnici.*

Definice. Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je otevřená množina a $w \in \partial G$. Říkáme, že

(i) bod w je **dosažitelný**, jestliže existuje křivka $\varphi : [0,1] \to \mathbb{C}$ splňující $\varphi([0,1)) \subset G$ a $\varphi(1) = w$;
(ii) bod w je **jednoduchý**, jestliže pro každou posloupnost bodů $z_n \in G$ splňující $z_n \to w$ existuje křivka $\varphi : [0,1] \to \mathbb{C}$ splňující $\varphi([0,1)) \subset G$ a $\varphi(1) = w$ a navíc existuje rostoucí posloupnost bodů $t_n \in (0,1)$ splňující $t_n \to 1$ a $\varphi(t_n) = z_n$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$.

Věta 9. *Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je omezená jednoduše souvislá oblast a f je konformní zobrazení G na $U(0,1)$.*

(1) *Je-li $w \in \partial G$ jednoduchý, pak lze f spojitě rozšířit na $G \cup \{w\}$. Po rozšíření platí $|f(w)| = 1$.*
(2) *Jsou-li $w_1, w_2 \in \partial G$ jednoduché a různé, pak lze f spojitě rozšířit na $G \cup \{w_1, w_2\}$. Po rozšíření platí $f(w_1) \neq f(w_2)$.*

Důsledek. *Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je omezená jednoduše souvislá oblast taková, že každý bod $w \in \partial G$ je jednoduchý. Pak lze každé konformní zobrazení G na $U(0,1)$ rozšířit na homeomorfismus $\overline{G}$ a $\overline{U(0,1)}$.*