Příklad 1: (a) + (b) $\quad \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{4^n}$, $x = (x_n) \in \ell^p$ $\quad (p \in [1,\infty))$

nebo $\in c_0$

- $p \in [1,\infty) \Rightarrow (\ell^p)^* \approx \ell^q$, kde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, tedy $q = \frac{p}{p-1}$, pokud $p \in (1,\infty)$
  $q = \infty$, pokud $p = 1$

  $c_0^* \approx \ell^1$

- Funkcionál φ je reprezentován posloupností $\left(\frac{1}{4^n}\right)$. Je tedy třeba zjistit, do kterého prostoru ℓ^q posloupnost patří a speciálně její normu.

- $p = 1$: Pak $q = \infty$, $\left(\frac{1}{4^n}\right) \in \ell^\infty$, $\left\|\left(\frac{1}{4^n}\right)\right\|_\infty = \frac{1}{4}$. Proto $\varphi \in (\ell^1)^*$
  a $\|\varphi\| = \frac{1}{4}$

- c_0: Duál je ℓ^1. $\left\|\left(\frac{1}{4^n}\right)\right\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n} = \frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{3}$

  Proto $\varphi \in c_0^*$ a v tomto případě $\|\varphi\| = \frac{1}{3}$

- $p \in (1,\infty)$: Pak $q = \frac{p}{p-1} \in (1,\infty)$.

$$\left\|\left(\frac{1}{4^n}\right)\right\|_q = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4^n}\right)^q\right)^{\frac{1}{q}} = \left(\frac{\frac{1}{4^q}}{1-\frac{1}{4^q}}\right)^{1/q} = \frac{1}{(4^q-1)^{1/q}}$$

Tedy $\varphi \in (\ell^p)^*$ a $\|\varphi\| = \frac{1}{(4^q-1)^{1/q}} = \frac{1}{\left(4^{\frac{p}{p-1}}-1\right)^{\frac{p-1}{p}}}$

(c) $\varphi(f) = \int_0^\infty f(x) e^{-x}\,dx$, $f \in L^p((0,+\infty))$, kde $p \in [1,\infty]$

- $p = 1$: $\left(L^1((0,\infty))\right)^* = L^\infty((0,\infty))$. φ je reprezentováno funkcí $x \mapsto e^{-x}$.
  Ta je spojitá a omezená $\Rightarrow$ patří do L^∞. Navíc je nezáporná a supremum je 1 (díky spojitosti splývá s ess sup). Tedy $\varphi \in \left(L^1((0,\infty))\right)^*$ a $\|\varphi\| = 1$

- $p \in (1,\infty)$. Pak $\left(L^p((0,\infty))\right)^* = L^q((0,\infty))$, kde $q = \frac{p}{p-1}$.
  φ je reprezentován funkcí $x \mapsto e^{-x}$. Její norma v L^q je

$$\left(\int_0^\infty e^{-qx}\,dx\right)^{1/q} = \left(\left[\frac{e^{-qx}}{-q}\right]_0^\infty\right)^{1/q} = \left(\frac{1}{q}\right)^{1/q} = \left(\frac{p-1}{p}\right)^{\frac{p-1}{p}}$$

Proto $\varphi \in \left(L^p((0,\infty))\right)^*$ a $\|\varphi\| = \left(\frac{p-1}{p}\right)^{\frac{p-1}{p}}$

• $p=\infty$: Pak $(L^\infty((0,\infty)))^*$ obsahuje jako podprostor $L^1((0,\infty))$
(díky vnoření $L^1((0,\infty))$ do druhého duálu).
Ověříme, zda reprezentující funkce $x\mapsto e^{-x}$ patří do $L^1((0,\infty))$:
$$\int_0^\infty |e^{-x}|dx = \int_0^\infty e^{-x}dx = [-e^{-x}]_0^\infty = 1$$
Tedy $\varphi \in (L^\infty((0,\infty)))^*$ a $\|\varphi\|=1$.

(c) $\varphi(f) = f(0) - \int_{-1}^1 t f(t)\,dt$, $f\in C([-1,1])$

• $C([-1,1])^* \simeq M([-1,1])$. Vyjádříme φ jako integrál podle nějaké míry.

Uvažme míru $\nu(A) = \int_A t\,dt$, $A\subset[-1,1]$ borelovská.

Pak ν je znaménková míra a $\int_{[-1,1]} f\,d\nu = \int_{-1}^1 f(t)\cdot t\,dt$ pro $f\in C([-1,1])$

Tedy φ je reprezentován mírou $\varepsilon_0-\nu$ (ε_0 je Diracova míra)
a platí $\|\varepsilon_0-\nu\| = \|\varepsilon_0\|+\|\nu\| = 1+\int_{-1}^1|t|dt = 1+2\cdot\int_0^1 t\,dt = 1+2\cdot\frac{1}{2}=2$

zde se využívá, že $\varepsilon_0 \perp \nu$, jde o vzájemně ortogonální míry, protože ε_0 je nesena $\{0\}$ a ν je nesena $[-1,1]\setminus\{0\}$.

Tedy $\varphi\in(C([-1,1]))^*$ a $\|\varphi\|=2$

Příklad 2

$X = (C_0(\mathbb{R}), \|\cdot\|)$, kde $\|f\| = \sup_{t\in\mathbb{R}} (2+\sin t)|f(t)|$

(a) $\|\cdot\|$ je norma ekvivalentní $\|\cdot\|_\infty$

POSTUP 1 : • $\|\cdot\|$ je norma, protože splňuje axiomy normy
(ověří se stejně jako pro $\|\cdot\|_\infty$)
• $-1\le \sin t\le 1 \Rightarrow 1\le 2+\sin t\le 3$
$\Rightarrow \|f\|_\infty \le \|f\| \le 3\|f\|_\infty$
Proto je $\|\cdot\|$ ekvivalentní $\|\cdot\|_\infty$.

• <u>POSTUP 2</u>: Víme, že $(C_0(\mathbb{R}), \|\,\|_\infty)$ je NLP (dokonce Banachův)

Uvažme $T : C_0(\mathbb{R}) \to C_0(\mathbb{R})$ definované předpisem

$$Tf(x) = (2+\sin x) f(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad f \in C_0(\mathbb{R})$$

Pozorování: $f \in C_0(\mathbb{R}) \Rightarrow Tf \in C_0(\mathbb{R})$

[$(2+\sin x)$ je spojitá a omezená, proto Tf je spojitá a má limitu 0 v $\pm\infty$]

T je lineární [jasné]

$\|f\|_\infty \le \|Tf\|_\infty \le 3\|f\|_\infty \Rightarrow T$ je izomorfismus

Protože $\|f\| = \|Tf\|_\infty$, plyne z toho, že $\|\cdot\|$ je ekvivalentní norma (viz poznámky v oddílu I.2)

(5) $\varphi_1(f) = \int_0^{2\pi} f$, $\quad \varphi_2(f) = \int_0^{2\pi} f(x)\cos x \, dx$, $\quad \varphi_3(f) = \int_1^{\infty} \frac{f(x)}{x^2} dx$

• φ_1, φ_2 jsou dobře definované (integrál ze spojité funkce na kompaktním intervalu)

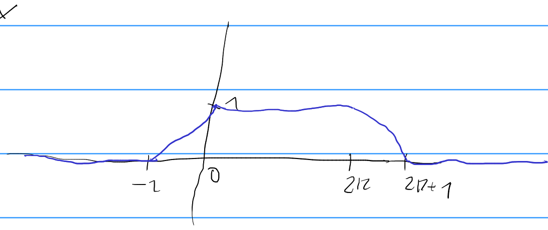
φ_3 je též dobře definovaný: $\frac{f(x)}{x^2}$ je spojitá na $[1,\infty)$, integrál u ∞ konverguje (absolutně) dle srovnávacího kritéria ($\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$)

• $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ jsou zřejmě lineární (použije se linearita integrálu)

• $|\varphi_1(f)| = \left|\int_0^{2\pi} f(x)\,dx\right| \le \int_0^{2\pi} |f(x)|\,dx = \int_0^{2\pi} \frac{|f(x)|(2+\sin x)}{2+\sin x}dx \le \|f\| \cdot \int_0^{2\pi} \frac{1}{2+\sin x}dx$

Tedy $\|\varphi_1\| \le \int_0^{2\pi} \frac{1}{2+\sin x}dx$

Uvažme funkci g:



a $f(x) = \frac{g(x)}{2+\sin x}$. Pak $f \in X$, $\|f\| = 1$ a $\varphi_1(f) = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2+\sin x}dx$

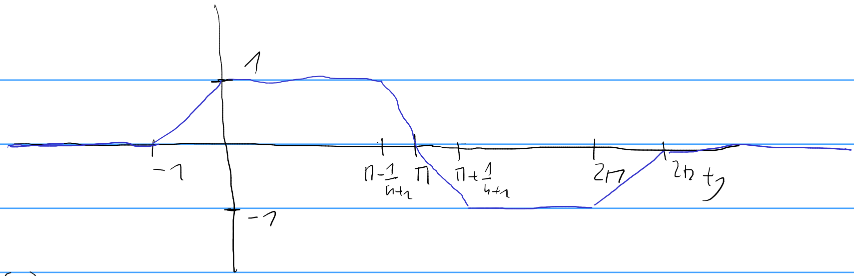
Proto $\|\varphi_1\| = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2+\sin x}dx$ a norma se nabývá.

• $|\varphi_2(f)| = \left|\int_0^{2\pi} f(x)\cos x\,dx\right| \underset{(*)}{\le} \int_0^{2\pi} |f(x)|\,|\cos x|\,dx = \int_0^{2\pi} \frac{|f(x)|(2+\sin x)\,|\cos x|}{2+\sin x}$

$\underset{(O)}{\le} \|f\| \cdot \int_0^{2\pi} \frac{|\cos x|}{2+\sin x}dx \Rightarrow \|\varphi_2\| \le \int_0^{2\pi} \frac{|\cos x|}{2+\sin x}dx$

Je to skutečně norma:

g_n:



$f_n(x) = \frac{g_n(x)}{2+\sin x}$. Pak $f_n \in X$, $\|f_n\| = 1$

a $\varphi(f_n) \to \int_0^{2\pi} \frac{|\cos x|}{2+\sin x}\,dx$ (z Lebesgueovy věty, $f_n(x)\cdot\cos x \to \frac{|\cos x|}{2+\sin x}$ na $[0,2\pi]$ a třeba $\frac{1}{2+\sin x}$ je integrovatelná majoranta.

Norma se ale nenabývá

Nechť $f \in X$, $\|f\| = 1$ a v f se nabývá norma. Pak ve výpočtu výše musejí nastat rovnosti:

Rovnost v (○) $\Rightarrow$ $|f(x)| = \frac{1}{2+\sin x}$, $x \in [0, 2\pi]$

Rovnost v (*) $\Rightarrow$ $f(x)\cos x$ nemění znaménko

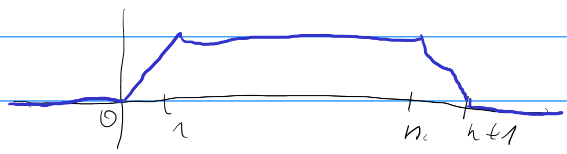
Protože $\cos x > 0$ na $(0,\pi)$, $\cos x < 0$ na $(\pi, 2\pi)$

a $\frac{1}{2+\sin\pi} = \frac{1}{2} \neq 0$, nelze obě podmínky splnit pro spojitou f.

• $|\varphi_3(f)| = \left|\int_1^\infty \frac{f(x)}{x^2}\,dx\right| \le \int_1^\infty \left|\frac{f(x)}{x^2}\right| dx = \int_1^\infty \frac{|f(x)|\,(2+\sin x)}{x^2\,(2+\sin x)}\,dx \le$

$\overset{(\square)}{\le} \|f\| \cdot \int_1^\infty \frac{1}{x^2\,(2+\sin x)}\,dx \quad \Rightarrow \|\varphi_3\| \le \int_1^\infty \frac{1}{x^2\,(2+\sin x)}\,dx$

Je to opravdu norma: g_n:



$f_n(x) = \frac{g_n(x)}{2+\sin x} \Rightarrow \|f_n\| = 1$ a $\varphi_3(f_n) \to \int_1^\infty \frac{1}{x^2(2+\sin x)}$

(z Leb. věty: $\frac{f_n}{x^2} \to \frac{1}{x^2(2+\sin x)}$ na $(1,\infty)$

integrovatelná majoranta $\frac{1}{x^2(2+\sin x)}$

Norma se nenabývá: Pokud $\|f\| = 1$ a v f se nabývá norma, pak rovnost v $(\square)$ implikuje $|f(x)| = \frac{1}{2+\sin x}$ pro $x \in [1,\infty)$, což nelze, protože f musí mít limitu 0 v ∞.

Příklad 3 : $H = L^2((0,2\pi),\mu)$, kde „$d\mu = t\,dt$"

tj.: $\mu(A) = \int_A t\,dt$

$$\int_0^{2\pi} f\,d\mu = \int_0^{2\pi} f(t)\cdot t\,dt$$

Tedy H je Hilbertův prostor se skalárním součinem $\langle f,g\rangle = \int_0^{2\pi} f(t)\,\overline{g(t)}\,t\,dt$

Položme $f(t) = \cos t$, $g(t) = \sin t$

(a) $Y = \operatorname{span}\{f,g\}$. ON bázi Y najdeme ortogonalizací:

$u := \frac{f}{\|f\|}$. Přitom $\|f\|^2 = \langle f,f\rangle = \int_0^{2\pi} \cos^2 t\cdot t\,dt = \int_0^{2\pi} \frac{1+\cos 2t}{2}\,t\,dt =$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{t}{2}\,dt + \int_0^{2\pi} \frac{t}{2}\cdot\cos 2t\,dt = \left[\frac{t^2}{4}\right]_0^{2\pi} + \left[\frac{t}{4}\sin 2t\right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \frac14 \sin 2t\,dt$$

$$= \pi^2 - 0 + 0 - 0 + \underbrace{\left[\frac18 \cos 2t\right]_0^{2\pi}}_{=0} = \pi^2$$

Tedy $u(t) = \frac{\cos t}{\pi}$

$$v = \frac{g - \langle g,u\rangle u}{\|g - \langle g,u\rangle u\|}$$

Spočtěme $\langle g,u\rangle = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \sin t\cdot\cos t\cdot t\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac12 \sin 2t\cdot t\,dt =$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\left[-\frac14 \cos 2t\cdot t\right]_0^{2\pi} + \underbrace{\int_0^{2\pi} \frac14 \cos 2t\,dt}_{= \left[\frac18 \sin 2t\right]_0^{2\pi} = 0} \right) = \frac{1}{\pi}\cdot\left(-\frac14\cdot 1\cdot 2\pi\right) = -\frac12$$

$$g - \langle g,u\rangle u = \sin t + \frac{1}{2\pi}\cos t$$

$$\|g - \langle g,u\rangle u\|^2 = \int_0^{2\pi} \left(\sin t + \frac{1}{2\pi}\cos t\right)^2 t\,dt = \int_0^{2\pi} \left(\sin^2 t + \frac{1}{\pi}\sin t\cos t + \frac{1}{4\pi^2}\cos^2 t\right) t\,dt$$

$$= \underbrace{\int_0^{2\pi} \frac{1}{4\pi^2}\,t\,dt}_{= \left[\frac{1}{8\pi^2}t^2\right]_0^{2\pi} = \frac{4\pi^2}{8\pi^2} = \frac12} + \int_0^{2\pi} \left(1 - \frac{1}{4\pi^2}\right)\sin^2 t\cdot t\,dt + \underbrace{\int_0^{2\pi} \frac{1}{\pi}\sin t\cos t\cdot t\,dt}_{= -\frac12,\ \text{viz výše}} =$$

$$= \left(1 - \frac{1}{4\pi^2}\right)\int_0^{2\pi} \frac{1-\cos 2t}{2}\,t\,dt = \left(1 - \frac{1}{4\pi^2}\right)\cdot\left(\left[\frac{t^2}{4}\right]_0^{2\pi} - \underbrace{\int_0^{2\pi} \frac{\cos 2t\cdot t}{2}\,dt}_{=0,\ \text{viz výše}} \right) = \left(1 - \frac{1}{4\pi^2}\right)\cdot\pi^2 =$$

$$= \pi^2 - \frac14$$

Tedy $v(t) = \dfrac{\sin t + \frac{1}{2\pi}\cos t}{\sqrt{\pi^2 - \frac{1}{4}}}$

Pár u, v je ON báze Y

(b) Ortogonální projekce na Y je dána vzorcem

$$Ph = \langle h, u\rangle u + \langle h, v\rangle v$$

Tedy $Ph(t) = \frac{1}{\pi^2}\left(\int_0^{2\pi} h(y)\cos(y)\cdot y\,dy\right)\cdot \cos t + \frac{1}{\pi^2-\frac{1}{4}}\left(\int_0^{2\pi} h(y)\left(\sin y + \frac{1}{2\pi}\cos y\right) y\,dy\right)\cdot\left(\sin t + \frac{1}{2\pi}\cos t\right)$

(c) Je třeba spočíst $P(1)$.

$$\int_0^{2\pi} 1\cdot\cos y\cdot y\,dy = [\sin y\cdot y]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi}\sin y\,dy = 0$$

$$\int_0^{2\pi} 1\cdot\left(\sin y + \frac{1}{2\pi}\cos y\right)y\,dy = \int_0^{2\pi}\sin y\cdot y\,dy = \underbrace{[-\cos y\cdot y]_0^{2\pi}}_{=-2\pi} + \underbrace{\int_0^{2\pi}\cos y\,dy}_{=0} = -2\pi$$

Tedy $P(1)(t) = -\dfrac{2\pi}{\pi^2-\frac{1}{4}}\left(\sin t + \frac{1}{2\pi}\cos t\right)$. To je ten nejbližší bod.

PŘÍKLAD 4 $X = C([0,1])$, $Tf(t) = f(0)t - \int_0^1 f - 3f(t)$

(a) $T \in \mathcal{L}(X)$:

- $f \in C([0,1]) \Rightarrow$ $t \mapsto f(0)t$ je spojitá na $[0,1]$; $\int_0^1 f$ je konstanta, tedy spojitá funkce; $-3f$ je spojitá $\Rightarrow Tf \in C([0,1])$
- T lineární --- jasné (lineární integrál a další operace s funkcemi.)
- T spojitý:

$$|Tf(t)| \le \underbrace{|f(0)|}_{\le\|f\|}\cdot\underbrace{t}_{\le 1} + \underbrace{\int_0^1 |f|}_{\le\|f\|} + \underbrace{3|f(t)|}_{\le 3\|f\|} \le 5\|f\| \Rightarrow \|T\| \le 5$$

(b) $T' \in \mathcal{L}(M([0,1]))$ vyjádříme:

$$T'_\mu(f) = \mu(Tf) = \int_0^1 \left(f(0)t + \int_0^1 f - 3f(t)\right) d\mu(t) =$$

$$\underbrace{f(0)}_{=\int_0 f\, d\delta_0} \cdot \int_0^1 t\, d\mu(t) + \int_0^1 f \cdot \mu([0,1]) - 3\int_0^1 f(t)\, d\mu(t)$$

Tedy $T'\mu = \left(\int_0^1 t\, d\mu(t)\right)\delta_0 + \mu([0,1])\cdot \lambda - 3\mu$

Lebesgueova míra

(c) Je T kompaktní?

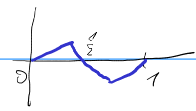
Ne, protože $Kf(t) = f(0)\cdot t + \int_0^1 f$ je kompaktní (dokonce konečněrozměrný)

a $T = K - 3I$

Kdyby T bylo kompaktní, pak $I = \frac{1}{3}(K - T)$ je také kompaktní, což je spor.

(d) $\sigma_p(T)$ a $\sigma(T)$: Spočteme $\sigma_p(K)$ a $\sigma(K)$:

- $0 \in \sigma_p(K)$, protože $\operatorname{Ker} K \neq 0$: V jádru K je každá f splňující $f(0) = 0$ a $\int_0^1 f = 0$

Například 

- Hledejme nenulová vlastní čísla: $\lambda \neq 0$, $Kf = \lambda f$

$f(0)\cdot t + \int_0^1 f = \lambda f(t)$. Levá strana je polynom stupně ≤ 1, tedy pravá strana též. Protože $\lambda \neq 0$, je i f polynom stupně ≤ 1

$\Rightarrow$ $f(t) = at + b$, kde $a, b \in \mathbb{C}$.

Pak $f(0) = b$

$\int_0^1 f = \int_0^1 (at+b)\,dt = \frac{a}{2} + b$

$bt + \left(\frac{a}{2} + b\right) = \lambda a t + \lambda b$

$b = \lambda a$, $\frac{a}{2} + b = \lambda b$ $\quad$ $\lambda a - b = 0$, $\frac{a}{2} + b(1-\lambda) = 0$

Netriviální řešení existuje $\Leftrightarrow$ matice soustavy je singulární

$\Leftrightarrow \det \begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ \frac{1}{2} & 1-\lambda \end{pmatrix} = 0$

Ten determinant je: $\lambda(1-\lambda) + \frac{1}{2} = -\lambda^2 + \lambda + \frac{1}{2} = -(\lambda^2 - \lambda - \frac{1}{2})$

kořeny: $\frac{1 \pm \sqrt{1+2}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$

Tedy $\sigma_p(K) = \{0, \frac{1+\sqrt{3}}{2}, \frac{1-\sqrt{3}}{2}\}$

[vlastní vektory, pokud jsme je chtěli, jsou např.:

k 0 viz výše

k $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ $\quad f(t) = t + \frac{1+\sqrt{3}}{2}$ $\quad$ (plyne to z $b = \lambda a$)

k $\frac{1-\sqrt{3}}{2}$ $\quad f(t) = t + \frac{1-\sqrt{3}}{2}$]

K kompaktní $\Rightarrow \sigma(K) = \sigma_p(K) \cup \{0\} = \sigma_p(K)$

Tedy $\sigma_p(T) = \sigma(T) = \{-3, \frac{-5+\sqrt{3}}{2}, \frac{-5-\sqrt{3}}{2}\}$

(c) $\sigma_p(T')$ a $\sigma(T')$: Platí $\sigma(T') = \sigma(T)$

Protože K' je též kompaktní, jsou nenulové prvky $\sigma(K')$ vlastní čísla.

Zároveň K' není prosté:

$K'\mu = \left(\int_0^1 t\, d\mu(t)\right)\delta_0 + \mu([0,1]) \cdot \lambda$

Stačí, aby $\int_0^1 t\, d\mu(t) = 0$ a zároveň $\mu([0,1]) = 0$

To splňuje třeba míra $\mu = \lambda - \frac{1}{2}(\delta_0 + \delta_1)$

[$\mu([0,1]) = 0$ je jasné

$\int_0^1 t\, d\mu(t) = \underbrace{\int_0^1 t\, dt}_{=\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}(0+1) = 0$]

Tedy i $0 \in \sigma_p(K')$.

Proto $\sigma_p(K') = \sigma(K') = \sigma(K)$,

a tedy $\sigma_p(T') = \sigma(T') = \sigma(T)$.

Příklad 5

$X = L^4((0,\pi))$

$$Tf(t) = f(t)\cdot \cot t + \cos^2 t \cdot \int_0^\pi f(x)\sin x\,dx \quad , t \in (0,\pi)$$
$$f \in X$$

(a) $T \in \mathcal{L}(X)$: Označme $T_1 f(t) = f(t)\cdot \cot t$, $t \in (0,\pi)$

$$\left.\begin{array}{l} \varphi(f) = \int_0^\pi f(x)\sin x\,dx \\ T_2(f)(t) = \varphi(f)\cdot\cos^2 t \quad , t \in (0,\pi) \end{array}\right\} f \in X$$

Platí: • Pro $f \in X$ je $T_1 f$ měřitelná funkce na $(0,\pi)$ a navíc

$$\|T_1 f\|_4^4 = \int_0^\pi |f(t)|^4 \cos^4 t\,dt \le \int_0^\pi |f(t)|^4 dt = \|f\|_4^4$$

speciálně $T_1 f \in X$

Protože T_1 je zřejmě lineární, dostáváme $T_1 \in \mathcal{L}(X)$ a $\|T_1\| \le 1$

• Duál k $L^4((0,\pi))$ je $L^{4/3}((0,\pi))$ $\quad \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1\right)$

Protože funkce $x \mapsto \sin x$ je v $L^{4/3}((0,\pi))$

$$\left(\int_0^\pi |\sin x|^{4/3} dx \le \int_0^\pi 1\,dx = \pi\right)$$

je $\varphi \in X^*$ $\quad$ (a $\|\varphi\| \le \pi^{3/4}$)

• Funkce $\cos^2$ patří do $L^4((0,\pi))$

$$\left(\int_0^\pi (\cos^2)^4 \le \int_0^\pi 1 = \pi \Rightarrow \text{její norma} \le \sqrt[4]{\pi}\right.$$

Proto T_2 je lineární operátor $X \to X$ a $\|T_2\| \le \sqrt[4]{\pi}\cdot\pi^{3/4} = \pi$

• Z toho plyne, že $T = T_1 + T_2 \in \mathcal{L}(X)$ a $\|T\| \le 1 + \pi$

(b) Vyjádříme $T' \in \mathcal{L}(L^{3/4}((0,\pi)))$:

$g \in L^{3/4}((0,\pi))$, $f \in L^4((0,\pi))$:

$$T'g\,(f) = g\,(Tf) = \int_0^\pi Tf\cdot g = \int_0^\pi \left(f(t)\cos t + \cos^2 t \int_0^\pi f(x)\sin x\,dx\right) g(t)\,dt$$

$$= \underbrace{\int_0^\pi f(t)\,g(t)\cot t\,dt}_{=\int_0^\pi f(x)g(x)\cos x\,dx} + \int_0^\pi g(t)\cos^2(t)\,dt \cdot \int_0^\pi f(x)\sin x\,dx =$$

(přejmenování integrační proměnné)

$$= \int_0^\pi f(x)\underbrace{\left(g(x)\cos x + \sin x\int_0^\pi g(t)\cdot\cos^2 t\,dt\right)}_{T'g(x)} dx$$

Tedy $T'g(x) = g(x)\cdot\cos x + \sin x \cdot \int_0^\pi g(t)\cdot\cos^2 t\,dt$, $x\in(0,\pi)$, $g\in L^{4/3}((0,\pi))$.

(c) Je T kompaktní?

Připomeňme, že $T = T_1 + T_2$. Přitom T_2 je kompaktní ($\dim R(T_2) = 1$)

Tedy T je kompaktní $\Leftrightarrow$ T_1 je kompaktní

Ale T_1 není kompaktní, protože $Y = \{f\in X;\ f\restriction(\frac{\pi}{4},\pi) = 0\}$ je nekonečněrozměrný uzavřený podprostor X a $T_1\restriction Y$ je izomorfismus

$\left(f\in Y \Rightarrow \|T_1 f\|_4^4 = \int_0^\pi |f(x)|^4\cos^4 x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} |f(t)|^4\cos^4 x\,dt \geq \int_0^{\pi/4} |f(t)|^4\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4 dt\right.$

$\left. = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4 \|f\|_4^4 \quad\Rightarrow\quad \|T_1 f\|_4 \geq \frac{1}{\sqrt{2}}\|f\|_4 \right)$

Protože $T_1\restriction Y$ je izomorfismus, není $T_1(B_Y)$ relativně kompaktní.

Proto T_1 není kompaktní

(d) Je T izomorfismus?

- T_1 není izomorfismus. Pokud totiž $f\in X$, $f = 0$ na $(0,\pi)\setminus(\frac{\pi}{2}-\varepsilon,\frac{\pi}{2}+\varepsilon)$,

  pak $\|T_1 f\|_4 \leq \cos(\frac{\pi}{2}-\varepsilon)\,\|f\|_4$

  $\left[\ \|T_1 f\|_4^4 = \int_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}+\varepsilon} |f(t)|^4 |\cos t|^4\,dt \leq \cos^4(\frac{\pi}{2}-\varepsilon)\int_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}+\varepsilon} |f|^4\ \right]$

  a když $\varepsilon \to 0+$, pak $\cos(\frac{\pi}{2}-\varepsilon) \to \cos\frac{\pi}{2} = 0$

- Abychom ukázali, že T není izomorfismus, stačí pro každé $\varepsilon > 0$ najít $f\in X$, $\|f\| = 1$, $f = 0$ na $(0,\pi)\setminus(\frac{\pi}{2}-\varepsilon,\frac{\pi}{2}+\varepsilon)$, $\varphi(f) = 0$

  Pak totiž $\|Tf\| = \|T_1 f\| \leq \cos(\frac{\pi}{2}-\varepsilon)$

Ale takové f najdeme snadno:

vezmeme $g = \chi_{(\frac{\pi}{2}-\varepsilon,\frac{\pi}{2})} - \chi_{(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}+\varepsilon)}$

a $f = \frac{g}{\|g\|}$

Tedy T není izomorfismus