

$\mathcal{M}(K, \mathbb{F}) =$ regularny borelski $\mathbb{F}$ -hodnotovno-mer na K
 (K je kompaktni metrični prostor, ali oboje Hausdorffova topološki-
 zmpaktni prostor)

$$\mu \in \mathcal{M}(K, \mathbb{F}) \dots \|\mu\| = \sup \left\{ \sum_{j=1}^n |\mu(B_j)| : B_1, \dots, B_n \subset K \text{ borelski po dva disjunktne} \right\}$$

Paž $\|\mu\|$ definira normo na $\mathcal{M}(K, \mathbb{F})$

$$\|\mu\| \geq 0 \dots \text{jako}$$

$$\|\mu\| = 0 \Rightarrow \forall B \subset K \text{ borelski plat } \mu(B) = 0 \Rightarrow \mu = 0$$

$$\|\lambda\mu\| = |\lambda| \|\mu\| \dots \text{snodno}$$

$$\|\mu_1 + \mu_2\| \leq \|\mu_1\| + \|\mu_2\|$$

$B_1, \dots, B_n \subset K$ disjunktne borelske

$$\sum_{j=1}^n |(\mu_1 + \mu_2)(B_j)| \leq \sum_{j=1}^n |\mu_1(B_j)| + \sum_{j=1}^n |\mu_2(B_j)| \leq \|\mu_1\| + \|\mu_2\|$$

$$\Rightarrow \|\mu_1 + \mu_2\| \leq \|\mu_1\| + \|\mu_2\|$$

Uplnost danižene ne bičl dročl.

$\mathcal{B} := \sigma$ -algebra borelskih podmnožin K

1. vrsta: $X_1 := \left\{ g: \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{F} : \sup \left\{ \sum_{j=1}^n |g(B_j)| : B_1, \dots, B_n \subset K \text{ borelski po dva disjunktne} \right\} < \infty \right\}$

Paž $X_1 \subset \ell^\infty(\mathcal{B})$

$$[B \in \mathcal{B} \Rightarrow |g(B)| \leq \sup \{ \dots \}] (*)$$

$$\phi: \ell^\infty(\mathcal{B}) \rightarrow [0, \infty]$$

$$\phi(g) = \sup \left\{ \sum_{j=1}^n |g(B_j)| : B_1, \dots, B_n \subset K \text{ borelski, po dva disj.} \right\}$$

Paž ϕ splinjo podpriladlji Vetičky I.8

$\Gamma(a)$... splinjeatiomy normy ... podalno jado nje, žab se
 uduzab, žab $\|\cdot\|$ je norma na $\mathcal{M}(K, \mathbb{F})$

$$(3) \|g\|_\infty \leq \phi(g) \text{ pljno } (*)$$

(c) ϕ je zlozila polospojita:

Nechť $\phi(g) > C$, zvolme $\varepsilon > 0$, ať $\phi(g) > C + \varepsilon$

z definice ϕ plyne existence $B_1, \dots, B_n \subset K$ borelských disjunktích, že $\sum_{j=1}^n |g(B_j)| > C + \varepsilon$

Podobně $h \in \mathcal{L}^\infty(B)$, $\|h - g\|_\infty < \frac{\varepsilon}{n}$, pak

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n |h(B_j)| &\geq \sum_{j=1}^n |g(B_j)| - \sum_{j=1}^n |g(B_j) - h(B_j)| \\ &> C + \varepsilon - n \cdot \frac{\varepsilon}{n} = C \end{aligned}$$

Tedy z vět č. 1.8 plyne, že (X_1, ϕ) je Banachov prostor.

2. krok $X_2 = \{g \in X_1, g \text{ je } \sigma\text{-aditivní, t.j. } \{g(B_j)\}_{j=1}^\infty \text{ posloupnost disjunktích borelských množin:}$

$$g\left(\bigcup_{j=1}^\infty B_j\right) = \sum_{j=1}^\infty g(B_j)\}$$

Pozn. ta řada nutně konverguje absolutně, protože konverguje při každém přeměně.

Pak X_2 je uzavřený podprostor X_1 .

• $(g_n) \subset X_2$, $g_n \rightarrow g \in X_1$ v normě prostoru X_1

$$\Rightarrow g \in X_2$$

$\{B_j\}_{j=1}^\infty$ disjunktí posloupnost borelských množin, $B := \bigcup_{j=1}^\infty B_j$

$$\forall n \in \mathbb{N}: g_n(B) = \sum_{j=1}^\infty g_n(B_j)$$

$$g_n \rightarrow g \text{ v } X_1 \Rightarrow g_n(B) \rightarrow g(B)$$

$$g \in X_1 \Rightarrow \sum_{j=1}^\infty |g(B_j)| = \sup_{k \in \mathbb{N}} \sum_{j=1}^k |g(B_j)| \leq \phi(g)$$

$\Rightarrow \sum_{j=1}^\infty g(B_j)$ konverguje absolutně

$$\begin{aligned} \left| \sum_{j=1}^\infty g_n(B_j) - \sum_{j=1}^\infty g(B_j) \right| &\leq \sum_{j=1}^\infty |g_n(B_j) - g(B_j)| = \sup_{k \in \mathbb{N}} \sum_{j=1}^k |g_n(B_j) - g(B_j)| \leq \\ &\leq \phi(g_n - g) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

3. každé X_2 je borelovské $\mathbb{R}$ -hodnotné míry, $\mathcal{M}(K, \mathbb{R})$ je podprostor X_2 tvořený regulárními mírami. Zbývá ukázat, že $\mathcal{M}(K, \mathbb{R})$ je uzavřen v X_2

$\mu \in X_2 \setminus \mathcal{M}(K, \mathbb{R}) \Rightarrow \mu$ není regulární

Tedy existuje $B \subset K$ borelovské a $\varepsilon > 0$ tak,

že pro každou $U \supset B$ otevřenou platí $|\mu|(U \setminus B) > \varepsilon$

$$\nu \in X_2, \quad \phi(\nu - \mu) < \frac{\varepsilon}{2}$$

$U \supset B$ otevřená $\Rightarrow |\mu|(U \setminus B) > \varepsilon \Rightarrow \text{se } C_1, \dots, C_n \subset U \setminus B$

borelovské disjunkční žele $\sum_{j=1}^n |\mu(C_j)| > \varepsilon$

$$\text{Pak} \quad \sum_{j=1}^n |\nu(C_j)| \geq \sum_{j=1}^n |\mu(C_j)| - \sum_{j=1}^n |\nu(C_j) - \mu(C_j)|$$

$$> \varepsilon - \phi(\nu - \mu) \geq \frac{\varepsilon}{2}$$

$\Rightarrow \nu$ není regulární