

I. Banachovy a Hilbertovy prostory

I.1 Základní značení, pojmy a příklady

Značení:

$\mathbb{R}$... těleso reálných čísel

$\mathbb{C}$... těleso komplexních čísel

$\mathbb{F}$... těleso $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$

Je-li X vektorový prostor nad $\mathbb{F}$, nulový vektor značíme $\mathbf{o}$ (a někdy také 0).

Je-li X vektorový prostor nad $\mathbb{F}$, $Y \subset X$ znamená, že Y je podprostor X .

Definice. Nechť X je vektorový prostor nad $\mathbb{F}$. Zobrazení $\|\cdot\| : X \rightarrow [0, +\infty)$ se nazývá **norma** na X , pokud pro každé $x, y \in X$ a $\lambda \in \mathbb{F}$ platí:

(i) $\|x\| = 0$ právě když $x = \mathbf{o}$.

(ii) $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$

(homogenita)

(iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

(trojúhelníková nerovnost)

Je-li $\|\cdot\|$ norma na X , říkáme, že dvojice $(X, \|\cdot\|)$ je **normovaný lineární prostor nad $\mathbb{F}$** .

Poznámky: (1) Normovaný lineární prostor nad $\mathbb{R}$ se nazývá **reálný normovaný lineární prostor**; normovaný lineární prostor nad $\mathbb{C}$ se nazývá **komplexní normovaný lineární prostor**. Říkáme-li pouze **normovaný lineární prostor**, myslíme tím buď reálný nebo komplexní normovaný lineární prostor.

(2) Je-li norma na X dána a nehrozí nedorozumění, říkáme, že X je normovaný lineární prostor.

Větička 1. Je-li $(X, \|\cdot\|)$ normovaný lineární prostor, pak zobrazení $\rho : X \times X \rightarrow [0, +\infty)$ definované předpisem

$$\rho(x, y) = \|x - y\|, \quad x, y \in X,$$

je metrika na X . Říká se jí **metrika indukovaná normou**.

Poznámky: (1) Každý normovaný lineární prostor je tedy zároveň metrickým prostorem. Proto můžeme mluvit o otevřených a uzavřených množinách, omezených množinách, kompaktních množinách, konvergenci posloupností, spojitosti zobrazení, hustých podmnožinách, separabilitě atp. Všechny tyto pojmy uvažujeme vzhledem k metrice indukované normou.

(2) Každý normovaný lineární prostor je zároveň vektorovým prostorem. Proto můžeme mluvit o podprostorech, konvexních podmnožinách, lineárních zobrazeních atp.

Definice. Normovaný lineární prostor, který je úplný v metrice indukované normou, se nazývá **Banachův prostor**.

Příklad 2.

(1) Prostor $\mathbb{F}$ je separabilní Banachův prostor, pokud za normu považujeme absolutní hodnotu.

(2) Nechť $n \in \mathbb{N}$. Prostor $\mathbb{F}^n$ je separabilní Banachův prostor, pokud jej uvažujeme s eukleidovskou normou, tj. s normou

$$\|(x_1, \dots, x_n)\|_2 = \sqrt{|x_1|^2 + \dots + |x_n|^2}, \quad (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{F}^n.$$

Příklad 3.

- (1) Je-li Γ libovolná množina, označme

$$B(\Gamma, \mathbb{F}) = \{f : \Gamma \rightarrow \mathbb{F}; f \text{ omezená}\}.$$

Pak $B(\Gamma, \mathbb{F})$ je vektorový prostor nad $\mathbb{F}$. Pokud na něm definujeme normu $\|\cdot\|_\infty$ předpisem

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(\gamma)|; \gamma \in \Gamma\}, \quad f \in B(\Gamma),$$

dostaneme Banachův prostor. Nadále ho budeme značit $\ell^\infty(\Gamma, \mathbb{F})$ nebo jen $\ell^\infty(\Gamma)$ (pokud $\mathbb{F}$ je buď dáno nebo není podstatné). Konvergence posloupností v $\ell^\infty(\Gamma)$ splývá se stejnoměrnou konvergencí na Γ .

- (2) Prostor $\ell^\infty(\mathbb{N})$ značíme ℓ^∞ a interpretujeme jako prostor omezených posloupností. Prostor ℓ^∞ není separabilní.
- (3) Je-li Γ konečná množina o n prvcích, prostor $\ell^\infty(\Gamma)$ interpretujeme jako prostor $\mathbb{F}^n$ opatřený normou

$$\|(x_1, \dots, x_n)\|_\infty = \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}, \quad (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{F}^n.$$

Tento prostor je separabilní.

Větička 4. Necht' $(X, \|\cdot\|)$ je normovaný lineární prostor a Y je podprostor X . Pak $(Y, \|\cdot\|)$ je normovaný lineární prostor. Je-li X Banachův prostor, pak Y je Banachův prostor (tj. úplný), právě když Y je uzavřený v X .

Příklady 5.

- (1) Je-li T metrický (nebo obecněji topologický) prostor, značíme

$$\mathcal{C}_b(T, \mathbb{F}) = \{f : T \rightarrow \mathbb{F}; f \text{ je spojitá a omezená}\}.$$

Pak $\mathcal{C}_b(T, \mathbb{F})$ je uzavřený podprostor $\ell^\infty(T, \mathbb{F})$, je to tedy Banachův prostor. (Často píšeme jen $\mathcal{C}_b(T)$.)

- (2) Je-li K kompaktní metrický (nebo obecněji Hausdorffův kompaktní topologický) prostor, pak každá spojitá funkce na K je omezená. Místo $\mathcal{C}_b(K)$ píšeme jen $\mathcal{C}(K)$. Je-li K kompaktní metrický prostor, je prostor $\mathcal{C}(K)$ separabilní.
- (3) Necht' c_0 označuje prostor všech (reálných nebo komplexních) posloupností, které mají limitu 0. Pak c_0 je uzavřený podprostor ℓ^∞ , je to tedy Banachův prostor. Prostor c_0 je separabilní.
- (4) Je-li Γ libovolná množina, označme

$$c_0(\Gamma, \mathbb{F}) = \{f : \Gamma \rightarrow \mathbb{F}; \forall \varepsilon > 0 : \{\gamma \in \Gamma; |f(\gamma)| > \varepsilon\} \text{ je konečná}\}.$$

Pak $c_0(\Gamma, \mathbb{F})$ je uzavřený podprostor $\ell^\infty(\Gamma, \mathbb{F})$, je to tedy Banachův prostor. Často tento prostor budeme značit jen $c_0(\Gamma)$. Prostor $c_0(\mathbb{N})$ splývá s prostorem c_0 . Je-li Γ nespočetná, je prostor $c_0(\Gamma)$ neseperabilní.

- (5) Necht'

$$\mathcal{C}^1([0, 1]) = \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{F}; f' \text{ je spojitá na } [0, 1]\},$$

kde f' označuje derivaci funkce f (v krajních bodech jednostrannou). Pak $\mathcal{C}^1([0, 1])$ je separabilní Banachův prostor, pokud normu definujeme jako

$$\|f\|_{\mathcal{C}^1} = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty = \max\{|f(x)|; x \in [0, 1]\} + \max\{|f'(x)|; x \in [0, 1]\}.$$

Značení: Nechť X je normovaný lineární prostor, $x \in X$ a $r > 0$. Pak značíme

- $B(x, r) = \{y \in X; \|y - x\| \leq r\}$ (uzavřená koule o středu x a poloměru r)
- $U(x, r) = \{y \in X; \|y - x\| < r\}$ (otevřená koule o středu x a poloměru r)
- $B_X = B(o, 1) = \{y \in X; \|y\| \leq 1\}$ (uzavřená jednotková koule)
- $U_X = U(o, 1) = \{y \in X; \|y\| < 1\}$ (otevřená jednotková koule)
- $S_X = \{y \in X; \|y\| = 1\}$ (jednotková sféra)

Poznámka:

- $B(x, r)$ (a tedy i B_X) je uzavřená konvexní množina.
- $U(x, r)$ (a tedy i U_X) je otevřená konvexní množina.
- S_X je uzavřená množina.

Větička 6 (norma a jednotková koule).

- (1) Nechť X je vektorový prostor nad $\mathbb{F}$ a $q : X \rightarrow [0, \infty)$ splňuje vlastnosti (i) a (ii) z definice normy. Pak q je norma, právě když množina $\{x \in X; q(x) \leq 1\}$ je konvexní.
- (2) Nechť X je normovaný lineární prostor. Pak normu lze vyjádřit vzorcem

$$\|x\| = \inf\{t > 0; \frac{1}{t} \cdot x \in B_X\} = \inf\{t > 0; \frac{1}{t} \cdot x \in U_X\}.$$

Příklad 7. Nechť $n \in \mathbb{N}$. Prostor $\mathbb{F}^n$ je separabilní Banachův prostor, pokud jej uvažujeme s některou z norem $\|\cdot\|_p$, $p \in [1, \infty)$, kde

$$\|(x_1, \dots, x_n)\|_p = (|x_1|^p + \dots + |x_n|^p)^{1/p}, \quad (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{F}^n.$$

Větička 8. Nechť $(X, \|\cdot\|)$ je Banachův prostor. Nechť funkce $\phi : X \rightarrow [0, +\infty]$ splňuje následující vlastnosti:

- (a) ϕ splňuje axiomy normy (přičemž bod (ii) se požaduje jen pro $\lambda \neq 0$);
- (b) $\phi(x) \geq \|x\|$ pro každé $x \in X$;
- (c) ϕ je zdola polospojité na X , tj. $\{x \in X; \phi(x) \leq c\}$ je uzavřená v X pro každé $c \in \mathbb{R}$.

Označme $Y = \{x \in X; \phi(x) < +\infty\}$. Pak (Y, ϕ) je Banachův prostor.

Příklady 9.

- (1) Nechť Γ je libovolná množina a $p \in [1, \infty)$. Definujme

$$\ell^p(\Gamma) = \{f : \Gamma \rightarrow \mathbb{F}; \sum_{\gamma \in \Gamma} |f(\gamma)|^p < +\infty\}.$$

Pak $\ell^p(\Gamma)$ je Banachův prostor, pokud definujeme normu předpisem

$$\|f\|_p = \left(\sum_{\gamma \in \Gamma} |f(\gamma)|^p \right)^{1/p}, \quad f \in \ell^p(\Gamma).$$

Místo $\ell^p(\mathbb{N})$ píšeme jen ℓ^p . Prostor ℓ^p je separabilní. Je-li Γ nespočetná, je $\ell^p(\Gamma)$ neseperabilní.

- (2) Necht' K je kompaktní metrický (nebo obecněji Hausdorffův topologický) prostor. Necht' $\mathcal{M}(K, \mathbb{R})$ značí prostor všech konečných znaménkových regulárních borelovských měr na K a $\mathcal{M}(K, \mathbb{C})$ prostor všech komplexních regulárních borelovských měr na K . V obou případech definujeme normu předpisem

$$\|\mu\| = |\mu|(K) = \sup \left\{ \sum_{j=1}^n |\mu(B_j)|; B_1, \dots, B_n \subset K \text{ po dvou disjunktní borelovské} \right\}.$$

Pak $\mathcal{M}(K, \mathbb{R})$ je reálný Banachův prostor a $\mathcal{M}(K, \mathbb{C})$ je komplexní Banachův prostor. Souhrnně značíme $\mathcal{M}(K, \mathbb{F})$ nebo jen $\mathcal{M}(K)$.

Příklad 10. Necht' (Ω, Σ, μ) je prostor s nezápornou mírou. Označme $\mathcal{L}^0(\Omega, \Sigma, \mu; \mathbb{F})$ vektorový prostor všech Σ -měřitelných funkcí na Ω s hodnotami v $\mathbb{F}$. Na tomto prostoru uvažujme ekvivalenci definovanou rovností μ -skoro všude. Necht' $L^0(\Omega, \Sigma, \mu; \mathbb{F})$ značí vektorový prostor všech tříd této ekvivalence. Pro $[f] \in L^0(\Omega, \Sigma, \mu; \mathbb{F})$ označme

$$\begin{aligned} \|[f]\|_p &= \left(\int_{\Omega} |f|^p d\mu \right)^{1/p} \quad \text{pro } p \in [1, \infty), \\ \|[f]\|_{\infty} &= \operatorname{ess\,sup}_{\Omega} |f| = \inf \{c > 0; |f| \leq c \text{ } \mu\text{-skoro všude}\}. \end{aligned}$$

Pak pro každé $p \in [1, \infty]$ je prostor

$$L^p(\Omega, \Sigma, \mu; \mathbb{F}) = \{[f] \in L^0(\Omega, \Sigma, \mu; \mathbb{F}); \|[f]\|_p < \infty\}$$

Banachův prostor, je-li opatřen normou $\|\cdot\|_p$.

Nevede-li to k nedorozumění, píšeme jen $L^p(\Omega, \Sigma, \mu)$, případně $L^p(\mu)$ nebo $L^p(\Omega)$. Rovněž obvykle píšeme f místo $[f]$.

Je-li $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ borelovská množina, pak prostorem $L^p(\Omega)$ rozumíme prostor $L^p(\Omega, \Sigma, \mu)$, kde Σ je σ -algebra borelovských podmnožin Ω a μ je zúžení n -rozměrné Lebesgueovy míry na Σ . Pro $p \in [1, \infty)$ je tento prostor separabilní.

Větička 11 (spojitost operací). Necht' $(X, \|\cdot\|)$ je normovaný lineární prostor nad $\mathbb{F}$. Pak

$$x \mapsto \|x\|; \quad (x, y) \mapsto x + y; \quad (\lambda, x) \mapsto \lambda x$$

jsou spojitá zobrazení (po řadě $X \rightarrow \mathbb{R}$, $X \times X \rightarrow X$, $\mathbb{F} \times X \rightarrow X$).

Tvrzení 12 (charakterizace ekvivalentních norem). Necht' X je vektorový prostor a $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ jsou dvě normy na X . Pak následující podmínky jsou ekvivalentní:

(i) Normy $\|\cdot\|_1$ a $\|\cdot\|_2$ určují stejné otevřené množiny. (Tj. identické zobrazení na X je homeomorfismus $(X, \|\cdot\|_1)$ na $(X, \|\cdot\|_2)$.)

(ii) Existují konstanty $c, d > 0$, že pro všechna $x \in X$ platí

$$c \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq d \|x\|_1.$$

(iii) Existují konstanty $c, d > 0$, že pro všechna $x \in X$ platí

$$c \cdot B_{(X, \|\cdot\|_2)} \subset B_{(X, \|\cdot\|_1)} \subset d \cdot B_{(X, \|\cdot\|_2)}.$$

Definice. Normy $\|\cdot\|_1$ a $\|\cdot\|_2$ na vektorovém prostoru X se nazývají **ekvivalentní**, jestliže splňují některou z (ekvivalentních) podmínek v Tvrzení 12.

Příklad 13. Pro každé $x \in \mathbb{F}^n$ a každé $p \in [1, \infty)$ platí

$$\|x\|_{\infty} \leq \|x\|_p \leq n^{1/p} \|x\|_{\infty}.$$

Tedy všechny normy $\|\cdot\|_p$, $p \in [1, \infty]$, jsou na $\mathbb{F}^n$ navzájem ekvivalentní.