

Věta X NLP, Y Banachov $\Rightarrow L(X, Y)$ je křpyl

Důk: $(T_n) \subset L(X, Y)$ Cauchyovská posloupnost

Paž: ① (T_n) je omezen $\Rightarrow \exists C > 0 \forall n \in \mathbb{N}: \|T_n\| \leq C$

② $x \in X$ pevné $\Rightarrow \forall m, n \in \mathbb{N}: \|T_m x - T_n x\| \leq \|T_m - T_n\| \cdot \|x\|$

odtud plyne, že $(T_n x)$ je Cauchyovská v Y

Y křpyl $\Rightarrow (T_n x)$ konverguje

označíme $Tx := \lim_n T_n x$

③ T je lineární (z věty I.11):

$$T(x+y) = \lim_n T_n(x+y) = \lim_n T_n x + T_n y = Tx + Ty$$

$\xrightarrow{\text{def } T}$ $\xrightarrow{\text{linearity } T_n}$ $\xrightarrow{\text{def } T + \text{I.11}}$

Nauč $\|T\| \leq C \quad x \in B_X \Rightarrow \forall n: \|T_n x\| \leq C \Rightarrow \|Tx\| \leq C$
tedy $T \in L(X, Y)$

④ $T_n \rightarrow T$ v $L(X, Y)$:

$\varepsilon > 0 \dots \exists n_0 \forall m, n \geq n_0 \quad \|T_m - T_n\| < \varepsilon$
zvolíme $m \geq n_0$ pevné

Pro $x \in B_X$ máme $T_m x - T_n x \xrightarrow{n \rightarrow \infty} T_m x - T_x$

pro $n \geq n_0$ je $\|T_m x - T_n x\| \leq \|T_m - T_n\| < \varepsilon$

tedy $\|T_m x - T_x\| \leq \varepsilon$

Pro každé $x \in B_X$ máme $\|T_m - T\| \leq \varepsilon$