

Trženi-1.18

X NLP, $X_0 \subset X$ hustý podprostor, Y Banachov, $T_0 \in L(X_0, Y)$

$\Rightarrow \exists! T \in L(X, Y)$; $T|_{X_0} = T_0$

Pak navíc $\|T\| = \|T_0\|$

Dk ① Jednoznačnost: $S, T \in L(X, Y)$, $S|_{X_0} = T|_{X_0} = T_0$
 X_0 hustý, S, T spojitý $\Rightarrow S = T$ na X

② $(x_n) \subset X_0$ Cauchyovská $\Rightarrow (Tx_n)$ Cauchyovská
 $\lceil \|T_0 x_n - T_0 x_m\| \leq \|T_0\| \cdot \|x_n - x_m\| \rceil$

③ Definice T : $x \in X$ ^{x_0 hustý} $\Rightarrow \exists (x_n) \subset X_0$ $x_n \rightarrow x$
 speciálně (x_n) je Cauchyovská $\Rightarrow (Tx_n)$ Cauchyovská
^{impl.} $\Rightarrow (Tx_n)$ konverguje $\rightarrow$ položíme $Tx := \lim_n Tx_n$

• definice je dobrá, nezávislá na volbě (x_n) :

necht $(x_n), (y_n) \subset X_0$, $x_n \rightarrow x$, $y_n \rightarrow x$

Uvažme posloupnost $x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3, \dots$, označme $j(z_n)$

Pak $z_n \rightarrow x$, kde (Tx_n) je konvergující

Proto $\lim Tx_n = \lim Ty_n$

• $T|_{X_0} = T_0$

$\lceil x \in X_0$, zvolit zastupující posloupnost $x_1, x_2, \dots$
 $\Rightarrow Tx = T_0 x \rceil$

④ T je Lipschitzovská o konstantou $\|T_0\|$

$\lceil x, y \in X$ $(x_n) \subset X_0$ $x_n \rightarrow x$ $\Rightarrow Tx = \lim_n Tx_n$
 $(y_n) \subset X_0$ $y_n \rightarrow y$ $Ty = \lim_n Ty_n$

$\Rightarrow \|Tx - Ty\| = \|\lim_n Tx_n - \lim_n Ty_n\| = \lim_n \|Tx_n - Ty_n\|$

$= \lim_n \|Tx_n - Ty_n\| \leq \|T_0\| \|x - y\|$
 $\leq \|T_0\| \|x_n - y_n\| \rightarrow \|x - y\|$

⑤ Theorem: $x, y \in X \dots (x_n, y_n) \subset X_0 \rightarrow x_n \rightarrow x, y_n \rightarrow y$

V.I. 11

$$\Rightarrow (x_n + y_n) \subset X_0, x_n + y_n \rightarrow x + y$$

③ + V.I. 11

$$\Rightarrow T(x+y) \stackrel{③}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} T_0(x_n + y_n) \stackrel{\text{to linear}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} T_0 x_n + T_0 y_n = Tx + Ty$$

V.I. 11

$$\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow (\lambda x_n) \subset X_0, \lambda x_n \rightarrow \lambda x$$

③ + V.I. 11

$$\Rightarrow T(\lambda x) \stackrel{③}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} T_0(\lambda x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda T_0(x_n) \stackrel{\text{to linear}}{=} \lambda Tx$$

⑥ Sketch: $T \in L(X, Y)$ z ④, ⑤, $T|_{X_0} = T_0$ z ③, $\|T\| \leq \|T_0\|$ z ④, $\|T_0\| \leq \|T\|$ z jedno. Može se dokazati.

Jednoznačnost z Vety I. 14 (z soc. (3)):

$\hat{X}, \hat{Y}$ Banachov prostori, $X_0 \subset \hat{X}$, $Y_0 \subset \hat{Y}$ gusto podprostori

$T_0 \in L(X_0, Y_0)$ izometrie X_0 na Y_0

$$\Rightarrow \exists! T \in L(\hat{X}, \hat{Y}), T|_{X_0} = T_0$$

Može se dokazati da je T izometrie $\hat{X}$ na $\hat{Y}$

Existence a jednoznačnost T plyne z Turzu I. 18. Zato se može dokazati da je T izometrie a da je $T|_{X_0} = T_0$

Definirajmo $S_0 := T_0^{-1}$. Paž $S_0 \in L(Y_0, X_0)$ a S_0 je izometrie Y_0 na X_0 z Turzu I. 18 dostanemo $S \in L(\hat{Y}, \hat{X})$, $S|_{Y_0} = S_0$, $\|S\| = 1$.

$$\text{Paž } ST \in L(\hat{X}), \text{ pa } x \in X_0 \text{ je } STx = \underbrace{S T_0 x}_{\in Y_0} = S_0 T_0 x = T_0^{-1} T_0 x = x$$

$$\text{Tež } STx = x \text{ pa } x \in X_0; X_0 \text{ gusto u } \hat{X}, ST \text{ sprovede } \Rightarrow STx = x \text{ pa } x \in \hat{X}$$

$$\text{Podobno } TS \in L(\hat{Y}), \text{ pa } y \in Y_0 \text{ je } TSy = T \underbrace{S_0 y}_{\in X_0} = T_0 S_0 y = y$$

$$\text{Tež } TSy = y \text{ pa } y \in Y_0; Y_0 \text{ gusto u } \hat{Y}, TS \text{ sprovede}$$

$$\Rightarrow TSy = y \text{ pa } y \in \hat{Y}. \text{ Tež } S = T^{-1}, \text{ tež } T \text{ je izomorfizmus } \hat{X} \text{ na } \hat{Y}.$$

$$\text{Može se dokazati da je } \|T\| = \|T^{-1}\| = 1 \Rightarrow T \text{ je izometrie}$$

$$\|Tx\| \leq \|x\| = \|T^{-1}Tx\| \leq \|Tx\|$$

$$\|T\| = 1$$

$$\|T^{-1}\| = 1$$