

I.2 Spojitá lineární zobrazení

Věta 14 (charakterizace spojitých lineárních zobrazení). Necht' X a Y jsou normované lineární prostory nad týmž $\mathbb{F}$ a $T : X \rightarrow Y$ je lineární zobrazení. Pak následující podmínky jsou ekvivalentní.

- (i) T je spojitá na X .
- (ii) T je spojitá v bodě $\mathbf{o}$.
- (iii) $T(B_X)$ je omezená množina v Y .
- (iv) Existuje takové $C \geq 0$, že pro každé $x \in X$ platí $\|Tx\| \leq C \cdot \|x\|$.
- (v) T je lipschitzovské.
- (vi) T je stejnoměrně spojitá.

Definice. Necht' X a Y jsou normované lineární prostory nad týmž $\mathbb{F}$.

- Je-li $T : X \rightarrow Y$ spojitá lineární zobrazení, označme

$$\|T\| = \sup\{\|Tx\|; x \in B_X\}.$$

Toto číslo nazýváme **normou lineárního zobrazení** T .

- Symbolem $L(X, Y)$ značíme vektorový prostor všech spojitých lineárních zobrazení $T : X \rightarrow Y$ opatřený normou definovanou v předchozím bodě. (Je to skutečně norma, takže dostaneme normovaný lineární prostor.)
- Místo $L(X, X)$ píšeme $L(X)$.
- Prostor $L(X, \mathbb{F})$ značíme X^* a nazýváme **duálním prostorem** (krátce **duálem**) prostoru X .

Větička 15 (vlastnosti normy lineárního zobrazení). Necht' X a Y jsou normované lineární prostory nad týmž $\mathbb{F}$ a $T \in L(X, Y)$ je spojitá lineární zobrazení.

- (a) $\|T\| = \sup\{\|Tx\|; x \in U_X\} = \sup\{\|Tx\|; x \in S_X\} = \sup\left\{\frac{\|Tx\|}{\|x\|}; x \in X \setminus \{\mathbf{o}\}\right\}.$
- (b) $\|Tx\| \leq \|T\| \cdot \|x\|$ pro $x \in X$.
- (c) $\|T\| = \min\{C \geq 0; \|Tx\| \leq C \cdot \|x\| \text{ pro } x \in X\}$
- (d) Je-li Z normovaný lineární prostor nad $\mathbb{F}$ a $S \in L(Y, Z)$, pak

$$ST \in L(X, Z) \text{ a } \|ST\| \leq \|S\| \cdot \|T\|.$$

Věta 16 (úplnost prostoru operátorů). Necht' X a Y jsou normované lineární prostory nad týmž $\mathbb{F}$. Je-li Y úplný, pak i $L(X, Y)$ je úplný. Speciálně, X^* je vždy Banachův prostor.

Definice. Necht' X a Y jsou normované lineární prostory nad týmž $\mathbb{F}$ a $T \in L(X, Y)$.

- T je **izometrie** (X do Y), pokud $\|Tx\| = \|x\|$ pro $x \in X$.
- T je **izomorfismus** (X do Y), pokud existují konstanty $c, d > 0$ takové, že

$$c\|x\| \leq \|Tx\| \leq d\|x\| \text{ pro } x \in X.$$

Poznámky:

- $T \in L(X, Y)$ je izomorfismus, právě když T je prosté a T^{-1} je spojitý na $T(X)$.
- $T \in L(X, Y)$ je izomorfismus, právě když vzorec

$$\|x\|_T = \|Tx\|, \quad x \in X,$$

definuje ekvivalentní normu na X .

- Normy $\|\cdot\|_1$ a $\|\cdot\|_2$ na X jsou ekvivalentní, právě když $\text{Id} : (X, \|\cdot\|_1) \rightarrow (X, \|\cdot\|_2)$ je izomorfismus.

Definice. Nechť X a Y jsou normované lineární prostory nad týmž $\mathbb{F}$.

- X a Y jsou **izometrické**, pokud existuje izometrie X na Y .
- X a Y jsou **izomorfní**, pokud existuje izomorfismus X na Y .

Větička 17 (úplnost je izomorfní vlastnost). Nechť X a Y jsou izomorfní normované lineární prostory. Je-li X úplný, je i Y úplný.

Tvrzení 18 (rozšíření operátoru na uzávěr). Nechť X a Y jsou normované prostory nad týmž $\mathbb{F}$, přičemž Y je úplný a X_0 nechť je hustý podprostor X . Pak každé $T_0 \in L(X_0, Y)$ lze jediným způsobem rozšířit na $T \in L(X, Y)$. Pro toto rozšíření platí $\|T\| = \|T_0\|$.

Věta 19 (zúplnění normovaného prostoru). Nechť X je normovaný lineární prostor.

- Existuje Banachův prostor $\widehat{X}$ a jeho hustý podprostor X_0 tak, že X_0 je izometrický X .
- Tato dvojice $(\widehat{X}, X_0)$ je jednoznačně určena. Přesněji: Pokud dvojice $(\widehat{X}, X_0)$ a $(\widehat{Y}, Y_0)$ mají vlastnosti z bodu (a), pak každou izometrii X_0 na Y_0 lze (jednoznačně) rozšířit na izometrii $\widehat{X}$ na $\widehat{Y}$.

Definice. Prostor $\widehat{X}$ z Věty 19 se nazývá **zúplněním** prostoru X . Obvykle ztotožňujeme X a X_0 , tj. předpokládáme, že X je podprostorem $\widehat{X}$.

Poznámka: Zúplnění normovaného lineárního prostoru lze zkonstruovat podobným způsobem jako se konstruuje zúplnění metrického prostoru. Jiný důkaz bude proveden v oddílu II.2.

Definice. Nechť X je normovaný lineární prostor a $P \in L(X)$. Zobrazení P se nazývá **projekce** (nebo přesněji **spojitá projekce**), pokud $P^2 = P$.

Větička 20 (základní vlastnosti projekcí). Nechť $P \in L(X)$ je projekce. Pak platí:

- $\text{Ker } P$ a $P(X)$ jsou uzavřené podprostory X .
- $\text{Id} - P$ je také projekce, $(\text{Id} - P)(X) = \text{Ker } P$, $\text{Ker}(\text{Id} - P) = P(X)$.
- Pro každé $x \in X$ existuje jediná dvojice prvků $y \in P(X)$ a $z \in \text{Ker } P$ splňující $x = y + z$. Přitom $y = Px$ a $z = (\text{Id} - P)x$.