

Věta 11 X NLP, $A, B \subset X$ ^{neprázdné} ^{konvexní}, $A \cap B = \emptyset$

$$(1) \text{ kdy } A \neq \emptyset \Rightarrow \exists f \in X^* \setminus \{0\} \quad \exists c \in \mathbb{R} \\ \forall x \in A \quad \forall y \in B : \operatorname{Re} f(x) \leq c \leq \operatorname{Re} f(y)$$

Důk: stačí dokázat pro reálný prostý X

zvolme $x_0 \in \operatorname{int} A$, $y_0 \in B$

$$\text{Položme } U := (A - x_0) - (B - y_0)$$

Pak platí:

- U je konvexní
- $0 \in \operatorname{int} U$ (protože $0 \in \operatorname{int} (A - x_0)$, $0 \in B - y_0$, a tedy $A - x_0 \subset U$)
- $y_0 - x_0 \notin U$

$$\neg \text{ když } y_0 - x_0 \in U, \text{ pak exist. } x \in A, y \in B \\ y_0 - x_0 = x - x_0 - (y - y_0)$$

$\Downarrow$

$$0 = x - y \Rightarrow x = y, \text{ spritně, protože } A \cap B = \emptyset \quad \Downarrow$$

$$Y = \{t \cdot (y_0 - x_0), t \in \mathbb{R}\}$$

$$\text{Definujme } f_0(t(y_0 - x_0)) = t \Rightarrow f_0 \text{ je lineární}$$

$$\text{Nauč } p_U(y_0 - x_0) \geq 1, \text{ a tedy } f_0 \leq p_U \text{ na } Y$$

$$\neg \text{ když } f_0(t(y_0 - x_0)) = t \quad \begin{matrix} t \leq 0 \\ t > 0 \end{matrix} \begin{matrix} \leq 0 \leq p_U(t(y_0 - x_0)) \\ t > 0 \leq t \cdot p_U(y_0 - x_0) = p_U(t(y_0 - x_0)) \end{matrix} \quad \Downarrow$$

$$\forall 2 \Rightarrow \exists f: X \rightarrow \mathbb{R} \text{ lineární} \quad f \leq p_U, \quad f|_Y = f_0$$

Paraphrase: $f \neq 0$ ($f(y_0 - x_0) = f_0(y_0 - x_0) = 1$)

f is linear: $0 \in \text{lin } U \Rightarrow p_0$ Lipschitzous f (Lemma 1(c))
 $\hookrightarrow$ Lipschitz constant

$$f(x) \leq p_U(x) \leq C \cdot \|x\|$$

$$\text{for } -f(x) = f(-x) \leq C \|-x\| = C \|x\|$$

$$\Rightarrow \|f\| \leq C$$

$f \leq 1$ in U (polar $p_U \leq 1$ in U)

for $x \in A, y \in B$

$$\Rightarrow f(x - x_0 - (y - y_0)) \leq 1$$

$$f(x) - f(y) + \underbrace{f(y_0 - x_0)}_{=1}$$

$$\Rightarrow \forall x \in A \forall y \in B: f(x) \leq f(y)$$

$$\text{Therefore } C = \sup f(A)$$

(2) A compact, B nonempty $\Rightarrow \exists f \in X^* \exists c, d \in \mathbb{R}$
 $\forall x \in A \forall y \in B: \text{Re } f(x) \leq c < d \leq \text{Re } f(y)$

Th: One's still possible X

A compact, B nonempty $\Rightarrow \text{dist}(A, B) > 0$

For $\text{dist}(A, B) = 0$, but exist $x_n \in A, y_n \in B$,
 s.t. $\|x_n - y_n\| < \frac{1}{n}$, for $\|x_n - y_n\| \rightarrow 0$

A compact $\Rightarrow$ every sequence (x_n) in A
 s.t. $x_{n_k} \rightarrow x$

Paž $\|y_{n_k} - x_{n_k}\| \rightarrow 0$, togi $y_{n_k} \rightarrow x$

$$(\|y_{n_k} - x\| \leq \|y_{n_k} - x_{n_k}\| + \|x_{n_k} - x\| \rightarrow 0)$$

Paž ako $x \in B$ (B je uzavřen) $\Rightarrow x \in A \cap B$, spor $\downarrow$

$$r := \text{dist}(A, B)$$

$\tilde{A} := A + U(0, r)$. Paž $\tilde{A}$ je konvexní, otevírací -
a $\tilde{A} \cap B = \emptyset$

Aplijemo (a) na $\tilde{A}$ a B

$$\Rightarrow \exists f \in X^* \setminus \{0\} \quad \text{a} \quad d \in \mathbb{R}, \text{ že}$$

$$\forall x \in \tilde{A} \quad \forall y \in B : \operatorname{Re} f(x) \leq d \leq \operatorname{Re} f(y)$$

Protože $f \neq 0$, BÚVO $\|f\| = 1$ (uměřeno d , ab to
může být)

To znamená, že $\sup f(\tilde{A}) \leq d$

$$\text{Ale } \sup f(\tilde{A}) = \sup f(A + U(0, r)) =$$

$$= \sup [f(A) + f(U(0, r))] = \sup f(A) + \sup f(U(0, r))$$

$$= \sup f(A) + r$$

$= r$, protože
 $\|f\| = 1$

Stačí tedy vzít $c = d - r$.