

Poznámky o obrazu míry

Nechť K, L jsou dva metricky kompaktní prostory a $\varphi: K \rightarrow L$ je spojitý zobrazení.
Je-li μ borelovská míra na K (obecně $\mathbb{R}$ -hodnotová), definujeme borelovskou míru $\varphi(\mu)$ na L předpisem
$$\varphi(\mu)(A) = \mu(\varphi^{-1}(A)), \quad A \subset L \text{ borelovská}$$

- Pozn:
- ① $A \subset L$ borelovská $\Rightarrow \varphi^{-1}(A)$ je borelovská v K
 - ② Je jasné, že $\varphi(\mu)$ je σ -aditivní míra na borelovské σ -algebře
 - ③ $\mu \geq 0 \Rightarrow \varphi(\mu) \geq 0, \quad \varphi(\mu)(L) = \mu(K) \quad (\text{tj. } \|\varphi(\mu)\| = \|\mu\|)$
 - ④ μ $\mathbb{R}$ -hodnotová $\Rightarrow \|\varphi(\mu)\| \leq \|\mu\|$
$$\left[A_1, \dots, A_n \subset L \text{ borelovské disjunktní} \Rightarrow \varphi^{-1}(A_1), \dots, \varphi^{-1}(A_n) \subset K \text{ borelovské disjunktní} \right]$$
$$\Rightarrow \sum_{j=1}^n |\varphi(\mu)(A_j)| = \sum_{j=1}^n |\mu(\varphi^{-1}(A_j))| \leq \|\mu\|$$

pochoďme že $\sup \dots \|\varphi(\mu)\| \leq \|\mu\|$
 - ⑤ Obraz míry lze definovat abstraktně pomocí prostých směrů

Příklad 1 $K = L = [-1, 1], \quad \varphi(t) = -t$

Pak $\varphi(\mu)(A) = \mu(-A), \quad A \subset [-1, 1] \text{ borelovská}$

- $\mu = \delta_1$ (Diracova míra v 1) $\Rightarrow \varphi(\mu) = \delta_{-1}$
- $\mu = \delta_1 + \delta_{-1} \Rightarrow \varphi(\mu) = \mu$
- $\mu = \delta_1 - \delta_{-1} \Rightarrow \varphi(\mu) = -\mu$
- $\mu = \delta_{\frac{1}{2}} + \delta_1 \Rightarrow \varphi(\mu) = \delta_{-1} + \delta_{\frac{1}{2}}$
- μ je Lebesgueova míra $\Rightarrow \varphi(\mu) = \mu$

2 $K = L = [-1, 1], \quad \varphi(t) = |t|$

Pak $\varphi(\mu)(A) = \mu(\{t \in [-1, 1]; |t| \in A\}) = \mu((A \cap [0, 1]) \cup (-(A \cap [0, 1])))$

- $\mu = \delta_1 \Rightarrow \varphi(\mu) = \delta_1$
- $\mu = \delta_{-1} \Rightarrow \varphi(\mu) = \delta_1$
- $\mu = \delta_1 + \delta_{-1} \Rightarrow \varphi(\mu) = \delta_1 + \delta_{\frac{1}{2}}$

- μ Lebesgueova míra $\Rightarrow \mu(A) = 2\mu(A \cap [0,1])$

[3] $K = [0,1]^2$, $L = [0,1]$, $\varphi(x,y) = x$

Pak $\varphi(\mu)(A) = \mu(A \times [0,1])$, $A \subset [0,1]$ borelovská

- $\mu = \delta_{(0,0)} \Rightarrow \varphi(\mu) = \delta_0$
- $\mu = \delta_{(0,0)} + \delta_{(0,1)} + \delta_{(1,1/2)} + \delta_{(1,1)} \Rightarrow \varphi(\mu) = 2\delta_0 + 2\delta_1$
- $\mu = \delta_{(1/2,0)} + \delta_{(1/2,1)} - \delta_{(1/2,1/2)} \Rightarrow \varphi(\mu) = \delta_{1/2}$
- $\mu = \text{Lebesgueova míra na } [0,1]^2 \Rightarrow \varphi(\mu) = \text{Leb. míra na } [0,1]$
- $\mu(A) = \lambda(\{t \in [0,1]; (0,t) \in A\})$, kde λ je Leb. míra na $[0,1]$
 $\Rightarrow \varphi(\mu) = \delta_0$

[4] $K = [0,1]$, $L = [0,1]^2$, $\varphi(x) = (x,x)$

$\varphi(\mu)(A) = \mu(\{x \in [0,1]; (x,x) \in A\})$

- $\mu = \delta_0 \Rightarrow \varphi(\mu) = \delta_{(0,0)}$
- $\mu = \delta_1 \Rightarrow \varphi(\mu) = \delta_{(1,1)}$
- $\mu = \text{Leb. míra na } [0,1] \Rightarrow \varphi(\mu)$ je normalizované Leb. míra na diagonále $\{(x,x); x \in [0,1]\}$

Tedy $\mu(A)$ se spočítá takto: $A \subset [0,1]^2$ borelovská

$\Rightarrow$ uvažujeme $A \cap \{(x,x); x \in [0,1]\}$, přičemž s diagonálou

diagonála je množka, máme na ní přirozené Leb. míru λ

Pak $\varphi(\mu)(A) = \frac{1}{\sqrt{2}} \lambda(A \cap \text{diagonála})$

Konstanta $\frac{1}{\sqrt{2}}$ je normalizační faktor – délka diagonály je $\sqrt{2}$.

Integrovaní podle osazenin: $f: L \rightarrow \mathbb{R}$ borelovská (spec. spojitá)

$$\Rightarrow \int_L f d\varphi(\mu) = \int_K f \circ \varphi d\mu$$

$\mu \geq 0$... dává se standardním způsobem: pro $f = \chi_A$ zdefiniujeme, dále pro jednoduché, měrné funkce,

pak pro reálné, pro reálné, pro komplexní

μ zmeškané ... $\mu = \mu^+ - \mu^-$, $\varphi(\mu) = \varphi(\mu^+) - \varphi(\mu^-)$, μ komplexní ... $\mu = \mu_1 + i\mu_2$

$\varphi(\mu) = \varphi(\mu_1) + i\varphi(\mu_2)$