V.1 Laplaceova transformace – definice a základní vlastnosti

Značení: Symbolem L_1^+ budeme značit množinu všech funkcí f s následujícími vlastnostmi:

(1) f je definována skoro všude na intervalu $[0, +\infty)$ a její hodnoty jsou komplexní čísla.
(2) Pro každé $T \in (0, +\infty)$ je f lebesgueovsky integrovatelná na $[0, T]$.
(3) Existuje $c \in \mathbb{R}$ takové, že funkce $t \mapsto f(t)e^{-ct}$ patří do $L^1(0, +\infty)$.

Poznámka: Nechť $f \in L_1^+$ a $c \in \mathbb{R}$ splňuje podmínku z třetího bodu. Pak tuto podmínku splňuje i každé $c' > c$. Označme c_f infimum všech c splňujících podmínku z třetího bodu. Pak $c_f \in [-\infty, +\infty)$ a infimum se může a nemusí nabývat.

Větička 1 (vlastnosti L_1^+).

- *L_1^+ je komplexní vektorový prostor.*
- *Je-li $f \in L_1^+$ a $k > 0$, pak i funkce $g : t \mapsto t^k f(t)$ patří do L_1^+, přičemž $c_g = c_f$.*
- *Je-li $f \in L_1^+$ a $\gamma \in \mathbb{C}$, pak i funkce $g : t \mapsto e^{\gamma t} f(t)$ patří do L_1^+, přičemž $c_g = c_f + \operatorname{Re} \gamma$.*

Definice. **Laplaceovou transformací** funkce $f \in L_1^+$ rozumíme funkci $\mathcal{L}f$ definovanou předpisem

$$\mathcal{L}f(p) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}\,\mathrm{d}t, \qquad p \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} p > c_f.$$

Pokud se infimum v definici c_f nabývá, definujeme $\mathcal{L}f$ týmž vzorcem pro $p \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} p \geq c_f$.

Věta 2 (základní vlastnosti Laplaceovy transformace). *Nechť $f \in L_1^+$. Pak platí:*

(1) *Pro každé $c > c_f$ je $\mathcal{L}f$ omezená v polorovině $\{p \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} p \geq c\}$.*
(2) *Pro každé $c > c_f$ je $\lim\limits_{\substack{p\to\infty \\ \operatorname{Re} p \geq c}} \mathcal{L}f(p) = 0$.*
(3) *$\mathcal{L}f$ je holomorfní v polorovině $\{p \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} p > c_f\}$ a*

$$(\mathcal{L}f)'(p) = \mathcal{L}(-tf(t))(p) \text{ pro } p \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} p > c_f.$$

Pokud se infimum v definici c_f nabývá, platí (1) a (2) i pro $c = c_f$ a navíc je $\mathcal{L}f$ spojitá na svém definičním oboru.

Poznámky: (1) Při počítání Laplaceovy transformace obvykle nepotřebujeme znát přesnou hodnotu c_f. Jelikož $\mathcal{L}f$ je holomorfní, je určena svými hodnotami na libovolné polorovině tvaru $\{p \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} p > c\}$.

(2) Uvažme množinu funkcí holomorfních na nějaké polorovině uvedého tvaru, přičemž dvě takové funkce ztotožníme, pokud se rovnají na nějaké polorovině téhož tvaru. Na této množině lze přirozeným způsobem definovat operace, s nimiž tvoří vektorový prostor. (Jde o tzv. **germy** funkcí.)

Větička 3 (Laplaceova transformace některých funkcí).

(1) $\mathcal{L}(1)(p) = \frac{1}{p}$, $\operatorname{Re} p > 0$;
(2) $\mathcal{L}(e^{\alpha t})(p) = \frac{1}{p-\alpha}$, $\operatorname{Re} p > \operatorname{Re} \alpha$, $\alpha \in \mathbb{C}$;
(3) $\mathcal{L}(t^n)(p) = \frac{n!}{p^{n+1}}$, $\operatorname{Re} p > 0$, $n \in \mathbb{N}$;
(4) $\mathcal{L}(t^\nu)(p) = \frac{\Gamma(\nu+1)}{m_{\nu+1}(p)}$, $\operatorname{Re} p > 0$, $\nu \in (-1, +\infty)$;
(5) $\mathcal{L}(t^n e^{\alpha t})(p) = \frac{n!}{(p-\alpha)^{n+1}}$, $\operatorname{Re} p > \operatorname{Re} \alpha$, $\alpha \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$.

Věta 4 (Laplaceova transformace a operace).

(1) *$\mathcal{L}$ je lineární zobrazení.*
(2) $\mathcal{L}(f(\alpha t))(p) = \frac{1}{\alpha}\mathcal{L}f(\frac{p}{\alpha})$, $f \in L_1^+$, $\alpha > 0$.
(3) *Nechť $f \in L_1^+$ a $\tau > 0$. Definujme funkci f_τ předpisem*

$$f_\tau(t) = \begin{cases} 0 & t < \tau, \\ f(t-\tau) & t \geq \tau. \end{cases}$$

Pak $\mathcal{L}f_\tau(p) = e^{-p\tau}\mathcal{L}f(p)$.
(4) $\mathcal{L}(e^{\sigma t} f(t))(p) = \mathcal{L}f(p-\sigma)$, $f \in L_1^+$, $\sigma \in \mathbb{C}$.
(5) *Nechť $f \in L_1^+$. Definujme funkci F předpisem $F(t) = \int_0^t f$. Pak $F \in L_1^+$ a $\mathcal{L}(F)(p) = \frac{1}{p}\mathcal{L}(f)(p)$.*
(6) *Nechť f má spojitou derivaci na $[0, +\infty)$, přičemž v bodě 0 uvažujeme derivaci zprava. Pokud $f' \in L_1^+$, pak $\mathcal{L}(f')(p) = p\mathcal{L}f(p) - f(0)$.*
(7) *Nechť funkce $\frac{f(t)}{t}$ patří do L_1^+. Pak i $f \in L_1^+$ a*

$$\mathcal{L}\left(\frac{f(t)}{t}\right)(p) = \lim_{r \to +\infty} \int_{[p,p+r]} \mathcal{L}f.$$

(8) *Nechť $f_1, f_2 \in L_1^+$. Pak jejich konvoluce definovaná vzorcem*

$$(f_1 * f_2)(t) = \int_0^t f_1(t-\tau) f_2(\tau)\, \mathrm{d}\tau, \qquad t \in [0, +\infty),$$

patří do L_1^+ a platí $\mathcal{L}(f_1 * f_2) = \mathcal{L}(f_1)\mathcal{L}(f_2)$.