I. Úvod k Úvodu do komplexní analýzy

O čem a k čemu je komplexní analýza, předpokládané znalosti a kontext

O čem je komplexní analýza

- Komplexní analýza se zabývá zejména komplexními funkcemi komplexní proměnné, podobně jako reálná analýza se zabývá reálnými funkcemi reálné proměnné. Pokud jde o zkoumání spojitosti a limit, není mezi komplexní a reálnou analýzou podstatný rozdíl. Klíčový rozdíl je v pojmu derivace – derivace podle komplexní proměnné, byť definovaná zcela analogicky derivaci podle reálné proměnné (viz oddíl I.3), má zcela jiné vlastnosti (viz celý zbytek semestru).
- Diferenciální počet komplexních funkcí komplexní proměnné (zejména jeho úvodní partie) je výrazně jednodušší než diferenciální počet funkcí reálné proměnné. Chybí v něm totiž řada patologií známých z reálné analýzy.
- Pokročilejší partie komplexní analýzy (hlubší zkoumání funkcí komplexní proměnné s ohledem na odhady jejich růstu a na jejich hraniční chování či studium komplexních funkcí více komplexních proměnných) jsou již složitější a jsou úzce provázány s pokročilými partiemi reálné analýzy. K tomu se však v Úvodu do komplexní analýzy nedostaneme.

K čemu to je dobré

- Jednak je to pěkné a zajímavé, tak jako celá matematika.
- Dále to poskytuje nové pohledy na jiné oblasti matematiky, v různých partiích se používají pojmy i věty z komplexní analýzy. Například:
  - Komplexní analýza umožňuje velmi jednoduše dokázat základní větu algebry o existenci kořenů polynomů (viz Kapitola III).
  - Výsledky z Kapitoly III se používají ke studiu spektra operátorů ve funkcionální analýze.
  - Metody a výsledky komplexní analýzy se používají v teorii čísel (například při zkoumání prvočísel). K tomu se sice nedostaneme, ale o tom, že v komplexní analýze některé výpočty úzce souvisí s celými čísly, svědčí vlastnosti indexu bodu ke křivce (viz Kapitola III), jakož i věty o počtu kořenů (viz oddíl V.2).
- Výsledky a metody komplexní analýzy se používají i mimo matematiku, například v některých odvětvích fyziky (elekrotechnika, hydrodynamika, aerodynamika, termodynamika). K tomu se ovšem nedostaneme.

Stručný obsah přednášky

- Základní pojmy, derivace podle komplexní proměnné, holomorfní funkce.
- Mocninné řady a elementární funkce komplexní proměnné.
- Křivkový integrál v $\mathbb{C}$ a jeho aplikace, vlastnosti holomorfních funkcí.
- Laurentovy řady a jejich aplikace.
- Globální Cauchyova věta, Cauchyův vzorec a jejich aplikace.

Předpokládané znalosti

- Reálná a komplexní čísla a operace s nimi.
- Funkce jedné reálné proměnné – spojitost, limity, derivace včetně početní techniky.
- Funkce více reálných proměnných (zejména dvou) – spojitost, limity, parciální derivace, (totální) diferenciál.
- Základní pojmy z metrických prostorů aplikované na $\mathbb{R}^n$ a podmnožiny $\mathbb{R}^n$, kompaktní množiny, souvislé množiny.
- Stejnoměrná a lokálně stejnoměrná konvergence, věty o záměně.
- Mocninné řady.
- Integrální počet funkcí jedné reálné proměnné - primitivní funkce, Riemannův a Newtonův integrál.
- Lebesgueův integrál (zejména na intervalu), spojitost a derivace integrálu podle parametru, Fubiniova věta (aspoň v $\mathbb{R}^2$).

Pokračování

Přirozeným pokračováním Úvodu do komplexní analýzy je přednáška Komplexní analýza 1 (NMMA338). Je určena pro studenty zaměření *matematická analýza*, ale může být zajímavá i užitečná i pro ostatní studenty. Zabývá se mj. zobecněním holomorfních funkcí, použitím metod funkcionální analýzy, aproximacemi pomocí racionálních funkcí a konformními zobrazeními.