TĚLESO KOMPLEXNÍCH ČÍSEL

$\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ s operacemi

- sčítání a násobení reálným číslem (jako v $\mathbb{R}^2$), tj.
  $(x,y) + (a,b) = (x+a, y+b)$, $(x,y), (a,b) \in \mathbb{R}^2$
  $t \cdot (x,y) = (tx, ty)$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $t \in \mathbb{R}$

- násobení
  $(x,y) \cdot (a,b) = (xa - yb, xb + ya)$, $(x,y), (a,b) \in \mathbb{R}^2$

① $\mathbb{C}$ s těmito operacemi je komutativní těleso, nulový prvek je $(0,0)$, jednotkový prvek je $(1,0)$

Dk:
- sčítání je komutativní a asociativní
- $(x,y) + (0,0) = (x,y)$ pro $(x,y) \in \mathbb{C}$
- opačný prvek k (x,y) je prvek $(-x,-y)$

⌈ To vše plyne z vlastností sčítání na $\mathbb{R}$ ⌋

- násobení je komutativní, tj. $(x,y) \cdot (a,b) = (a,b) \cdot (x,y)$
  ⌈ snadno se ověří z definice díky komutativitě násobení na $\mathbb{R}$ ⌋

- násobení je asociativní:
  ⌈ $(x,y) \cdot ((a,b) \cdot (c,d)) = (x,y) \cdot (ac - bd, ad + bc) =$
  $= (x(ac-bd) - y(ad+bc), x(ad+bc) + y(ac-bd)) =$
  $= (xac - xbd - yad - ybc, xad + xbc + yac - ybd)$
  $((x,y) \cdot (a,b)) \cdot (c,d) = (xa - yb, xb + ya) \cdot (c,d) =$
  $= ((xa-yb)c - (xb+ya)d, (xa-yb)d + (xb+ya)c) =$
  $= (xac - ybc - xbd - yad, xad - ybd + xbc + yac)$;
  vyšlo to stejné. ⌋

- $(1,0)$ je jednotkový prvek

$\ulcorner\ (1,0)\cdot(x,y) = (1\cdot x - 0\cdot y,\ 1\cdot y + 0\cdot x) = (x,y)\ \lrcorner$

- $(x,y) \in \mathbb{C} \setminus \{(0,0)\} \Rightarrow \left(\frac{x}{x^2+y^2}, -\frac{y}{x^2+y^2}\right)$ je inverzní prvek

$\ulcorner\ (x,y)\cdot\left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2}\right) = \left(\frac{x^2}{x^2+y^2} + \frac{y^2}{x^2+y^2}, \frac{-xy}{x^2+y^2} + \frac{xy}{x^2+y^2}\right)$

$= (1,0)\ \lrcorner$

- distributivita:

$(x,y)\left((a,b)+(c,d)\right) = (x,y)(a+c, b+d) = (x(a+c) - y(b+d),$
$x(b+d) + y(a+c)) = (xa+xc-yb-yd, xb+xd+ya+yc)$

$(x,y)\cdot(a,b) + (x,y)\cdot(c,d) = (xa-yb, xb+ya) + (xc-yd, xd+yc)$
$= (xa-yb+xc-yd, xb+ya+xd+yc)$

Vyšlo to stejně.

(2) $x \mapsto (x,0)$ je tělesový izomorfismus $\mathbb{R}$ do $\mathbb{C}$,
obor hodnot je $\{(x,y);\ y=0\}$

$\ulcorner\ 0 \mapsto (0,0)$
$1 \mapsto (1,0)$
$(x,0)+(y,0) = (x+y,0)$
$(x,0)\cdot(y,0) = (xy-0, x\cdot 0 + y\cdot 0) = (xy,0)\ \lrcorner$

③ Na $\mathbb{C}$ nelze definovat uspořádání, aby bylo uspořádaným tělesem

<u>Dk:</u> Připomeňme, že uspořádané těleso je těleso s úplným uspořádáním, které splňuje

(i) $\forall x,y,z: \quad x \leq y \Rightarrow x+z \leq y+z$

(ii) $\forall x,y: \quad x \geq 0 \;\&\; y \geq 0 \Rightarrow xy \geq 0$

Nechť $\leq$ je uspořádání na $\mathbb{C}$, že $(\mathbb{C}, \leq)$ je uspořádané těleso. Protože je $\leq$ úplné, je buď

$(0,1) \leq (0,0)$ nebo $(0,1) \geq (0,0)$

• $(0,1) \geq (0,0) \overset{(ii)}{\Rightarrow} \underbrace{(0,1)\cdot(0,1)}_{=(-1,0)} \geq (0,0) \Rightarrow (-1,0) \geq (0,0)$

• $(0,1) \leq (0,0) \overset{(i)}{\Rightarrow} (0,0) \leq (0,-1) \underset{(ii)}{\Rightarrow} \underbrace{(0,-1)\cdot(0,-1)}_{=(-1,0)} \geq 0 \Rightarrow (-1,0) \geq (0,0)$

V obou případech vyšlo $(-1,0) \geq (0,0)$

Tedy dle (ii) dostaneme $\underbrace{(-1,0)\cdot(-1,0)}_{(1,0)} \geq (0,0)$,

tj. $(1,0) \geq (0,0)$

Zároveň dle (i) dostáváme $(0,0) \geq (1,0)$

Tedy $(0,0) \leq (1,0) \;\&\; (0,0) \geq (1,0) \Rightarrow (0,0) = (1,0)$, což je spor!