IV.3 Limity některých integrálů

Lemma 5 (Jordanovo). *Nechť $\xi \in \mathbb{R}$ a f je funkce spojitá na $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \leq \xi, |z| > R\}$ pro nějaké $R > 0$, pro kterou platí*

$$\lim_{\substack{z\to\infty \\ \operatorname{Re} z \leq \xi}} f(z) = 0.$$

Pro $r > \max\{R, |\xi|\}$ nechť φ_r je křivka definovaná vztahem $\varphi_r(t) = re^{it}$, $t \in [\alpha_r, 2\pi - \alpha_r]$, kde $\alpha_r \in (0, \pi)$ je takové, že $\operatorname{Re}(re^{i\alpha_r}) = \xi$. Pak pro každé $x > 0$ platí

$$\lim_{r\to\infty} \int_{\varphi_r} f(z) e^{xz} \, \mathrm{d}z = 0.$$

Pokud navíc

$$\lim_{\substack{z\to\infty \\ \operatorname{Re} z \leq \xi}} z f(z) = 0,$$

pak tvrzení platí i pro $x = 0$.

Lemma 6 (Jordanovo – jiná varianta). *Nechť $0 \leq \alpha < \beta \leq \pi$ a f je funkce spojitá na $\{z \in \mathbb{C} : \arg z \in [\alpha, \beta], |z| > R\}$ pro nějaké $R > 0$, pro kterou platí*

$$\lim_{\substack{z\to\infty \\ \arg z \in [\alpha,\beta]}} f(z) = 0.$$

Pro $r > R$ nechť φ_r je křivka definovaná vztahem $\varphi_r(t) = re^{it}$, $t \in [\alpha, \beta]$. Pak pro každé $x > 0$

$$\lim_{r\to\infty} \int_{\varphi_r} f(z) e^{ixz} \, \mathrm{d}z = 0.$$

Lemma 7. *Nechť $a \in \mathbb{C}$ a f je holomorfní v nějakém prstencovém okolí bodu a. Dále nechť $\alpha < \beta$ a $\varphi_r(t) = a + re^{it}$, $t \in [\alpha, \beta]$. Pak platí:*

(i) *Pokud f je holomorfní v bodě a, pak $\lim\limits_{r\to 0+} \int_{\varphi_r} f = 0$.*

(ii) *Pokud f má v bodě a pól násobnosti 1, pak*

$$\lim_{r\to 0+} \int_{\varphi_r} f = i(\beta - \alpha) \operatorname{res}_a f.$$

Poznámka. V případě, že f má v bodě a pól vyšší násobnosti, pak uvedená limita je rovna ∞ s výjimkou „speciálních případů f, α, β“. Přesněji: Nechť f má v bodě a pól násobnosti p a $c_{-1}, \ldots, c_{-p}$ jsou koeficienty z Věty 2(2). Pokud pro každé $k \in \{2, \ldots, p\}$ platí $c_{-k}(e^{i(k-1)\alpha} - e^{i(k-1)\beta}) = 0$, pak limita je stejná, jako pro pól násobnosti 1; jinak je ∞. V případě, že koeficienty c_k jsou reálné a počítáme jen limitu reálné či imaginární části integrálu, je speciálních případů více (místo $e^{i\cdot(\ldots)}$ je v podmínce cos(...) resp. sin(...)).