V.2 Globální vlastnosti holomorfních funkcí

Věta 2 (globální Cauchyova věta a Cauchyův vzorec). *Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je otevřená množina, Γ cykl takový, že $\langle\Gamma\rangle \subset \Omega$ a pro každé $a \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ je* $\operatorname{ind}_\Gamma a = 0$. *Pak pro každou funkci f holomorfní na Ω platí*

$$\int_\Gamma f = 0$$

a

$$f(z) \cdot \operatorname{ind}_\Gamma z = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z} \, \mathrm{d}w, \qquad z \in \Omega \setminus \langle\Gamma\rangle.$$

Poznámky: (1) Pokud $\int_\Gamma f = 0$ pro každou f holomorfní v Ω, pak $\operatorname{ind}_\Gamma a = 0$ pro každé $a \in \mathbb{C} \setminus \Omega$.

(2) Je-li $\overline{\mathbb{C}} \setminus \Omega$ je souvislá, jsou předpoklady věty splněny pro každý cykl v Ω.

Věta 3 (obecná reziduová věta). *Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je otevřená množina, Γ cykl takový, že $\langle\Gamma\rangle \subset \Omega$ a pro každé $a \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ je* $\operatorname{ind}_\Gamma a = 0$. *Nechť $M \subset \Omega$ je izolovaná v Ω, $M \cap \langle\Gamma\rangle = \emptyset$ a f je funkce holomorfní v $\Omega \setminus M$. Pak platí:*

$$\int_\Gamma f = 2\pi i \sum_{a \in M} \operatorname{ind}_\Gamma a \cdot \operatorname{res}_a f.$$

V sumě na pravé straně přitom je jen konečně mnoho nenulových sčítanců.

Věta 4 (princip argumentu). *Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je oblast, Γ cykl takový, že $\langle\Gamma\rangle \subset \Omega$ a pro každé $a \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ je* $\operatorname{ind}_\Gamma a = 0$. *Nechť f je funkce holomorfní na Ω, která na $\langle\Gamma\rangle$ nenabývá hodnoty 0. Je-li $a \in \Omega$ kořenem funkce f, označme $N_f(a)$ jeho násobnost. Pak platí:*

$$\sum_{a \in \Omega, f(a)=0} N_f(a) \cdot \operatorname{ind}_\Gamma a = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f'}{f} = \frac{1}{2\pi i} \Delta_\Gamma \log f.$$

Lemma 5. *Nechť $\varphi, \psi : [a,b] \to \mathbb{C}$ jsou dvě uzavřené cesty. Nechť $z \in \mathbb{C}$ splňuje nerovnost $|\varphi(t) - \psi(t)| < |\varphi(t) - z|$ pro každé $t \in [a,b]$. Pak $z \in \mathbb{C} \setminus (\langle\varphi\rangle \cup \langle\psi\rangle)$ a platí* $\operatorname{ind}_\varphi z = \operatorname{ind}_\psi z$.

Věta 6 (Rouchéova věta). *Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je oblast, Γ cykl takový, že $\langle \Gamma \rangle \subset \Omega$ a pro každé $a \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ je $\operatorname{ind}_\Gamma a = 0$. Nechť f a g jsou holomorfní na Ω a pro každé $z \in \langle \Gamma \rangle$ platí*

$$|f(z) - g(z)| < |f(z)|.$$

Pak (při značení z Věty 4)

$$\sum_{a \in \Omega, f(a)=0} N_f(a) \cdot \operatorname{ind}_\Gamma a = \sum_{a \in \Omega, g(a)=0} N_g(a) \cdot \operatorname{ind}_\Gamma a.$$

Věta 7 (Rouchéova věta pro kompakt). *Nechť $K \subset \mathbb{C}$ je kompaktní množina a $\Omega = \operatorname{Int} K$. Nechť f, g jsou spojité funkce definované na K s hodnotami v $\mathbb{C}$, které jsou holomorfní na Ω. Předpokládejme, že pro každé $z \in \partial K$ platí $|f(z) - g(z)| < |f(z)|$. Pak (při značení z Věty 4)*

$$\sum_{a \in \Omega, f(a)=0} N_f(a) = \sum_{a \in \Omega, g(a)=0} N_g(a).$$

Věta 8. *Nechť f je holomorfní na $U(a, R)$, $b = f(a)$ a funkce $f - b$ má v bodě a kořen násobnosti $p \in \mathbb{N}$ (tj. f* **nabývá své hodnoty v bodě** *a p-***násobně***). Pak existuje $r \in (0, R)$ a $\rho > 0$ tak, že pro každé $w \in P(b, \rho)$ f nabývá hodnoty w v právě p různých bodech z $U(a, r)$.*

Věta 9 (věta o otevřeném zobrazení). *Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je oblast a f je nekonstantní holomorfní funkce na Ω. Pak f je otevřené zobrazení, tj. $f(G)$ je otevřená podmnožina $\mathbb{C}$ pro každou $G \subset \Omega$ otevřenou.*

Věta 10 (věta o lokální existenci inverzní funkce). *Nechť f je funkce holomorfní na okolí bodu $a \in \mathbb{C}$ a $f'(a) \neq 0$. Pak existuje $r > 0$ s následujícími vlastnostmi:*

(i) *f je prostá na $U(a, r)$;*
(ii) *$G = f(U(a, r))$ je otevřená množina;*
(iii) *inverzní funkce f^{-1} je holomorfní na G a pro každé $z \in G$ platí*

$$(f^{-1})'(z) = \frac{1}{f'(f^{-1}(z))}.$$

Věta 11. *Nechť f je funkce holomorfní a prostá na otevřené množině $\Omega \subset \mathbb{C}$. Pak pro každé $z \in \Omega$ je $f'(z) \neq 0$ a inverzní funkce k f je holomorfní na $f(\Omega)$.*