II. Mocninné řady a elementární holomorfní funkce
II.1 Mocninné řady - připomenutí

Definice. Nechť $a \in \mathbb{C}$ a $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ je posloupnost komplexních čísel. Nekonečnou řadu funkcí tvaru

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n \tag{M}$$

nazýváme **mocninnou řadou o středu** a.

Poloměrem konvergence řady (M) rozumíme $R \in [0, +\infty]$ definované vzorcem

$$R = \sup\{r \in [0, +\infty);\ \sum_{n=0}^{\infty} |c_n| r^n \text{ konverguje}\}.$$

Množinu

$$U(a, R) = \{z \in \mathbb{C}\, |z-a| < R\},$$

pak nazýváme **kruhem konvergence** řady (M).

Věta 1.

(1) *Každá mocninná řada konverguje absolutně a lokálně stejnoměrně na svém kruhu konvergence.*

(2) *Položme* $L = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}$. *Pak poloměr konvergence řady* (M) *je*

$$R = \begin{cases} \frac{1}{L}, & L > 0, \\ +\infty, & L = 0. \end{cases}$$

(3) *Existuje-li* $\lim_{n\to\infty} \frac{|c_{n+1}|}{|c_n|}$, *rovná se číslu* L *z předchozího bodu.*

(4) *Mocninné řady* $\sum_{n=1}^{\infty} n c_n (z-a)^{n-1}$ *a* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1}(z-a)^{n+1}$ *mají stejný poloměr konvergence jako řada* (M).

Věta 2 (derivace a integrace mocninné řady). *Uvažujme řadu* (M) *a nechť* $R > 0$ *její poloměr konvergence. Definujme funkci* $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$, $z \in U(a, R)$. *Pak platí:*

(i) *Funkce* f *je spojitá na* $U(a, R)$.

(ii) *Funkce* f *je holomorfní na* $U(a, R)$ *a platí*

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n (z-a)^{n-1}, \qquad z \in U(a, R).$$

(iii) *Funkce* $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1}(z-a)^{n+1}$ *je holomorfní na* $U(a, R)$ *a pro každé* $z \in U(a, R)$ *platí* $F'(z) = f(z)$.

II.2 Elementární celé funkce

Definice. Pro $z \in \mathbb{C}$ definujme

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Funkci exp nazýváme **exponenciální funkce**, krátce **exponenciála**. Dále označme $e = \exp(1)$.

Věta 3 (vlastnosti exponenciální funkce). *Platí:*

(E1) *Funkce* exp *je definovaná na* $\mathbb{C}$, *je na* $\mathbb{C}$ *holomorfní a platí* $\exp'(z) = \exp(z)$ *pro* $z \in \mathbb{C}$.

(E2) $\exp(0) = 1$.

(E3) $\exp(z + w) = \exp(z) \cdot \exp(w)$ *pro* $z, w \in \mathbb{C}$.

(E4) $\exp(z) \neq 0$ *pro* $z \in \mathbb{C}$.

(E5) $\overline{\exp(z)} = \exp(\overline{z})$ *pro* $z \in \mathbb{C}$.

(E6) *Funkce* exp *zobrazuje* $\mathbb{R}$ *na interval* $(0, +\infty)$, *je na* $\mathbb{R}$ *rostoucí a (ryze) konvexní.*

(E7) $|\exp(z)| = \exp(\operatorname{Re} z)$ *pro* $z \in \mathbb{C}$.

Definice. Pro $z \in \mathbb{C}$ položme

- $\cos(z) = \frac{\exp(iz)+\exp(-iz)}{2}$ (funkce **kosinus**);
- $\sin(z) = \frac{\exp(iz)-\exp(-iz)}{2i}$ (funkce **sinus**);
- $\cosh(z) = \frac{\exp(z)+\exp(-z)}{2}$ (funkce **hyperbolický kosinus**);
- $\sinh(z) = \frac{\exp(z)-\exp(-z)}{2}$ (funkce **hyperbolický sinus**);

Věta 4 (vlastnosti goniometrických a hyperbolických funkcí).

(1) *Funkce* cos, sin, cosh, sinh *jsou definovány na* $\mathbb{C}$, *přičemž funkce* cos a cosh *jsou sudé a funkce* sin a sinh *jsou liché.*

(2) $\cos(0) = \cosh(0) = 1$, $\sin(0) = \sinh(0) = 0$.

(3) *Funkce* cos, sin, cosh, sinh *jsou holomorfní na* $\mathbb{C}$ *a pro každé* $z \in \mathbb{C}$ *platí:*

$$\cos'(z) = -\sin(z) \qquad \cosh'(z) = \sinh(z)$$
$$\sin'(z) = \cos(z) \qquad \sinh'(z) = \cosh(z)$$

(4) *Pro každé* $z \in \mathbb{C}$ *platí*

$$\cosh(iz) = \cos(z), \quad \sinh(iz) = i\sin(z), \quad \exp(iz) = \cos(z) + i\sin(z).$$

(5) *Pro každé* $z \in \mathbb{C}$ *platí:*

$$\cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} \qquad \cosh(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$
$$\sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad \sinh(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

(6) *Funkce* cos, sin, cosh a sinh *nabývají na* $\mathbb{R}$ *reálných hodnot.*

(7) *Pro každá* $z, w \in \mathbb{C}$ *platí*

$$\cos(z+w) = \cos(z)\cos(w) - \sin(z)\sin(w) \qquad \cosh(z+w) = \cosh(z)\cosh(w) + \sinh(z)\sinh(w)$$
$$\sin(z+w) = \sin(z)\cos(w) + \cos(z)\sin(w) \qquad \sinh(z+w) = \sinh(z)\cosh(w) + \cosh(z)\sinh(w)$$

(8) *Pro každé* $z \in \mathbb{C}$ *platí*

$$\cos^2(z) + \sin^2(z) = 1, \qquad \cosh^2(z) - \sinh^2(z) = 1.$$

(9) $\cos(2) < 0$, *a tedy můžeme definovat*

$$\pi = 2 \cdot \min\{x > 0 : \cos(x) = 0\}.$$

Pak platí $\pi < 4$.

(10) *Na intervalu* $[0, \frac{\pi}{2}]$ *je funkce* sin *rostoucí a konkávní, funkce* cos *klesající a konkávní;* $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$.

(11) $\cos(\pi) = -1$, $\sin(\pi) = 0$.

(12) *Pro každé* $z \in \mathbb{C}$ *platí* $\cos(z+\pi) = -\cos(z)$, $\sin(z+\pi) = -\sin(z)$.

(13) *Funkce* sin a cos *jsou periodické s periodou* 2π; *funkce* cosh, sinh a exp *jsou periodické s periodou* $2\pi i$.

(14) *Nechť* $z, w \in \mathbb{C}$. *Pak* $\exp(z) = \exp(w)$, *právě když* $z - w$ *je celočíselný násobek* $2\pi i$.

(15) *Nechť* $z \in \mathbb{C}$. *Pak* $\sin(z) = 0$, *právě když* z *je celočíselný násobek* π.

(16) *Funkce* exp *zobrazuje* $\mathbb{C}$ *na* $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.