Logaritmus, argument a důkaz Věty II.5

$\ln := (\exp \restriction \mathbb{R})^{-1}$

Pak: $D_{\ln} = (0,\infty)$, $\ln$ je rostoucí a spojitá na $(0,\infty)$, zobrazuje $(0,\infty)$ na $\mathbb{R}$, $\ln 1 = 0$
[z vět o spojitých funkcích na intervalu]

Pro $z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ označme
$\mathrm{Log}(z) := \{w \in \mathbb{C};\ \exp(w) = z\}$
$\log(z) :=$ to $w \in \mathrm{Log}\, z$, pro které $\mathrm{Im}\, w \in (-\pi,\pi]$

$\mathrm{Arg}(z) := \{\mathrm{Im}\, w;\ w \in \mathrm{Log}\, z\}$, $\arg(z) = \mathrm{Im} \log(z)$

Věta II.5 (1) $\forall z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}: \mathrm{Log}(z) \neq \emptyset$, $\log(z)$ je definováno
a $\mathrm{Log}(z) = \{\log(z) + 2k\pi i;\ k \in \mathbb{Z}\}$

[Dle Věty II.4 (16) je $\exp(\mathbb{C}) = \mathbb{C}\setminus\{0\}$, proto
$\forall z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ je $\mathrm{Log}(z) \neq \emptyset$.
Zvolme $w_0 \in \mathrm{Log}(z)$. Dle Věty II.4 (14) je
$\mathrm{Log}(z) = \{w_0 + 2k\pi i,\ k \in \mathbb{Z}\}$.
Proto existuje právě jedno $w \in \mathrm{Log}\, z$, pro které $\mathrm{Im}\, w \in (-\pi,\pi]$
to to w je pak $\log(z)$, důkaz je hotov]

(2) $\log = (\exp \restriction_{\{z \in \mathbb{C};\ \mathrm{Im}\, z \in (-\pi,\pi]\}})^{-1}$

[Dle V II.4 (14) je exp na této množině prostá a dle V II.4 (16) ji zobrazuje na $\mathbb{C}\setminus\{0\}$. Proto z definice plyne, že log je příslušná inverzní funkce]

(3) $\forall z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$: $\log(z) = \ln|z| + i\arg(z)$.

$\ulcorner$ Z definice arg plyne, že $\arg(z) = \operatorname{Im}\log(z)$.
Zbývá ukázat, že $\operatorname{Re}\log(z) = \ln|z|$
Protože $|z|>0$, je toto ekvivalentní rovnosti $|z| = \exp(\operatorname{Re}\log z)$,

které platí:

$$\exp(\operatorname{Re}\log z) \overset{V3,(E7)}{=} |\exp(\log z)| \overset{\log z \in \operatorname{Log} z}{=} |z| \quad \lrcorner$$

(4) $\forall z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$: $z = |z|\left(\cos(\arg z) + i\sin(\arg z)\right)$

$$\ulcorner\ z = \exp(\log z) \overset{(3)}{=} \exp(\ln|z| + i\arg(z)) \overset{V3,(E3)}{=}$$

$$= \underbrace{\exp(\ln|z|)}_{=|z|}\cdot\exp(i\arg z) \overset{V4\,(4)}{=} |z|\cdot\left(\cos(\arg z) + i\sin(\arg z)\right) \quad \lrcorner$$

(5) Nechť $z = x+iy \in \mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$

Pak platí: $\arg(z) = \begin{cases} \arcsin\frac{\operatorname{Im} z}{|z|} = \arcsin\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{je-li } \operatorname{Re} z > 0 \\ \arccos\frac{\operatorname{Re} z}{|z|} = \arccos\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{je-li } \operatorname{Im} z > 0 \\ -\arccos\frac{\operatorname{Re} z}{|z|} = -\arccos\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{je-li } \operatorname{Im} z < 0 \end{cases}$

$\ulcorner$ Připomeňme, že $\arcsin = \left(\sin\restriction[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]\right)^{-1}$

$$\arccos = \left(\cos\restriction[0,\pi]\right)^{-1}$$

Druhé rovnosti plynou z toho, že $\operatorname{Re} z = x$, $\operatorname{Im} z = y$, $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$

Protože $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$, máme

$$\begin{array}{c} z \overset{(4)}{=} |z|\left(\cos(\arg z) + i\sin(\arg z)\right) = \sqrt{x^2+y^2}\left(\cos(\arg z) + i\sin(\arg z)\right) \\ \| \\ x+iy = \sqrt{x^2+y^2}\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + i\,\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) \end{array}$$

Tedy $\cos(\arg z) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\sin(\arg z) = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

Dle definice víme, že $\arg z \in (-\pi, \pi]$

Dále víme, že

$$\begin{array}{ll} \sin t > 0 \text{ pro } t \in (0, \tfrac{\pi}{2}] & (\text{z V4 } (2, 10)) \\ \sin t < 0 \text{ pro } t \in [-\tfrac{\pi}{2}, 0) & (\text{z lichosti } \sin, \text{ V4(1)}) \\ \left.\begin{array}{l} \sin t > 0 \text{ pro } t \in [\tfrac{\pi}{2}, \pi) \\ \sin t < 0 \text{ pro } t \in (-\pi, -\tfrac{\pi}{2}] \end{array}\right\} & \text{z V4(12)} \end{array}$$

Dále víme, že

$$\begin{array}{ll} \cos t > 0 \text{ pro } t \in [0, \tfrac{\pi}{2}) & (\text{z definice } \pi) \\ \cos t > 0 \text{ pro } t \in (-\tfrac{\pi}{2}, 0] & (\text{sudosti } \cos, \text{ V4(1)}) \\ \left.\begin{array}{l} \cos t < 0 \text{ pro } t \in (\tfrac{\pi}{2}, \pi] \\ \cos t < 0 \text{ pro } t \in (-\pi, \tfrac{\pi}{2}] \end{array}\right\} & \text{z V4(12)} \end{array}$$

a navíc $\cos \pi = -1$, $\sin \pi = 0$

Proto:

$\operatorname{Re} z > 0 \Rightarrow x > 0 \Rightarrow \cos(\arg z) > 0 \Rightarrow \arg z \in (-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2})$

Tedy $\arg z = \arcsin \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$\operatorname{Im} z > 0 \Rightarrow y > 0 \Rightarrow \sin(\arg z) > 0 \Rightarrow \arg z \in (0, \pi)$

$\Rightarrow \arg z = \arccos \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$

Návod: $\operatorname{Im} z<0 \Rightarrow y<0 \Rightarrow \arg z \in (-\pi, 0)$

$\Rightarrow -\arg z \in (0,\pi)$, $\cos(-\arg z) = \cos\arg z = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$

tedy $-\arg z = \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$,

$\arg z = -\arccos \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$. ⌋

(6) Funkce arg je spojitá na $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$

⌈ Připomeňme, že funkce arccos a arcsin jsou spojité na $[-1,1]$, proto ze vzorců v (5) plyne, že funkce arg je spojitá na každé z množin

$\{z;\ \operatorname{Re} z>0\}$, $\{z;\ \operatorname{Im} z>0\}$, $\{z;\ \operatorname{Im} z<0\}$

To jsou otevřené množiny, jejichž sjednocení je $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$
To dokončuje důkaz ⌋

(7) Funkce log je spojitá na $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$

⌈ Z (6) víme, že Im log je spojitá, stačí dokázat, že Re log je spojitá, ale $\operatorname{Re}\log z = \ln|z|$ je spojitá na $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ ⌋

(8) Funkce log je holomorfní na $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ a $\log' z = \frac{1}{z}$ pro $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$

⌈ $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ & $r>0$, že $U(z,r) \subset \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$

$$\log' z = \lim_{w\to z} \frac{\log w - \log z}{w - z} \overset{\text{stačí uvažovat } w\in U(z,r)}{=} \lim_{w\to z} \frac{\log w - \log z}{\exp(\log w) - \exp(\log z)} =$$

$\lim_{w\to z} \log w = \log z$ (7)
log prostá
věta o limitě složené funkce

$$= \lim_{u\to \log z} \frac{u - \log z}{\exp(u) - \exp(\log z)} = \frac{1}{\exp'(\log z)} \overset{V3(E1)}{=} \frac{1}{\exp(\log z)} = \frac{1}{z}.$$ ⌋

definice derivace