III. Křivkový integrál a vlastnosti holomorfních funkcí
III.1 Křivky a křivkový integrál v $\mathbb{C}$

Definice. **Křivkou v** $\mathbb{C}$ rozumíme spojité zobrazení uzavřeného intervalu do $\mathbb{C}$, tj. spojitou funkci $\varphi : [a,b] \to \mathbb{C}$, kde $a < b$ jsou reálná čísla. Je-li $\varphi : [a,b] \to \mathbb{C}$ křivka, pak

- **obrazem křivky** φ rozumíme její obor hodnot, tj. množinu
$$\langle\varphi\rangle = \varphi([a,b]) = \{\varphi(t) : t \in [a,b]\};$$
- **počátečním bodem křivky** φ rozumíme bod $\varphi(a)$, **koncovým bodem** bod $\varphi(b)$;
- křivku φ nazýváme **uzavřenou**, pokud $\varphi(a) = \varphi(b)$;
- **opačnou křivkou k** φ rozumíme křivku $\dot{-}\,\varphi : [-b,-a] \to \mathbb{C}$ definovanou vzorcem $\dot{-}\,\varphi(t) = \varphi(-t)$;
- je-li navíc $\psi : [c,d] \to \mathbb{C}$ křivka, pro kterou $\psi(c) = \varphi(b)$, pak jejich **spojením** $\varphi \dot{+} \psi$ rozumíme křivku definovanou na intervalu $[a, b+d-c]$ vzorcem
$$(\varphi \dot{+} \psi)(t) = \begin{cases} \varphi(t), & t \in [a,b], \\ \psi(t-b+c), & t \in [b, b+d-c]; \end{cases}$$
- **délkou křivky** φ rozumíme
$$V(\varphi) = \sup\left\{ \textstyle\sum_{j=1}^n |\varphi(t_j) - \varphi(t_{j-1})| : n \in \mathbb{N}, a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b \right\}.$$

Křivku $\varphi(t) = a + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, kde $a \in \mathbb{C}$ a $r > 0$, nazýváme **kladně orientovaná kružnice o středu** a **a poloměru** r. Opačnou křivku nazýváme **záporně orientovaná kružnice**.

Křivku $\varphi(t) = a + t(b-a)$, $t \in [0,1]$, kde $a, b \in \mathbb{C}$, nazýváme **orientovaná úsečka** $[a,b]$.

Cestou neboli **po částech hladkou křivkou** v $\mathbb{C}$ rozumíme křivku $\varphi : [a,b] \to \mathbb{C}$, pro kterou existuje takové dělení $a = s_0 < s_1 < \cdots < s_n = b$, že pro každé $j = 1, \dots, n$ je funkce φ třídy C^1 na $[s_{j-1}, s_j]$ (tj. derivace φ' je spojitá na (s_{j-1}, s_j) a má v krajních bodech s_{j-1} a s_j vlastní jednostranné limity).

Poznámka: Je-li $\varphi : [a,b] \to \mathbb{C}$ cesta, pak $\varphi'(t)$ existuje pro všechna $t \in (a,b)$ až na konečně mnoho výjimek a navíc je φ' omezená na svém definičním oboru.

Je-li navíc $f : \langle\varphi\rangle \to \mathbb{C}$ spojitá funkce, definujeme **integrál funkce** f **podél cesty** φ vzorcem
$$\int_\varphi f = \int_\varphi f(z)\,\mathrm{d}z = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t,$$
kde integrál na pravé straně je zobecněný Riemannův, tj. roven
$$\sum_{j=1}^n \int_{s_{j-1}}^{s_j} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$$
Na tento integrál lze pohlížet i jako na Lebesgueův, což budeme často dělat.

Poznámky.

(1) Je-li $\varphi : [a,b] \to \mathbb{C}$ cesta, pak $V(\varphi) = \int_a^b |\varphi'(t)|\,\mathrm{d}t$.

(2) Právě definovaný křivkový integrál úzce souvisí s křivkovým integrálem druhého druhu. Pokud ztotožníme $\mathbb{C}$ s $\mathbb{R}^2$ a použijeme značení z Věty I.3, pak platí:
- $\operatorname{Re} \int_\varphi f$ je rovna integrálu druhého druhu funkce $\widetilde{\overline{f}}$ podél křivky φ,
- $\operatorname{Im} \int_\varphi f$ je rovna integrálu druhého druhu funkce $\widetilde{i\overline{f}}$ podél křivky φ.

(3) Další vztah výše definovaného křivkového integrálu ke křivkovému integrálu z reálné analýzy je následující: Nechť $\varphi : [a,b] \to \mathbb{C}$ je cesta, přičemž $\varphi|_{[a,b)}$ je prostá a $\varphi'(t) \neq 0$ až na konečně mnoho výjimek. Pro $z \in \langle\varphi\rangle$ zvolme $t \in [a,b)$ splňující $\varphi(t) = z$ a označme $\nu(z) = \frac{1}{|\varphi'(t)|}(\operatorname{Im}\varphi'(t), -\operatorname{Re}\varphi'(t))$, pokud je výraz definován. Pak pro $\mathcal{H}^1$-skoro všechna $z \in \langle\varphi\rangle$ je $\nu(z)$ definováno a je to normálový vektor ke křivce φ. Navíc $\int_\varphi f = \int_{\langle\varphi\rangle} \left\langle \widetilde{\overline{if}}(z) + i\widetilde{\overline{f}}(z), \nu(z) \right\rangle \mathrm{d}\mathcal{H}^1(z)$.

Větička 1. *Nechť $\varphi : [a,b] \to \mathbb{C}$ je cesta.*

(1) *Nechť h je rostoucí zobrazení intervalu $[c,d]$ na interval $[a,b]$, které je třídy C^1. Pak*
$$\int_{\varphi\circ h} f = \int_{\varphi} f \text{ pro každou spojitou } f : \langle\varphi\rangle \to \mathbb{C}.$$

(2) $\displaystyle\int_{\dot{-}\varphi} f = -\int_{\varphi} f$ *pro každou spojitou $f : \langle\varphi\rangle \to \mathbb{C}$.*

(3) *Je-li $\psi : [c,d] \to \mathbb{C}$ cesta splňující $\psi(c) = \varphi(b)$, pak*
$$\int_{\varphi\dot{+}\psi} f = \int_{\varphi} f + \int_{\psi} f \text{ pro každou spojitou } f : \langle\varphi\rangle \cup \langle\psi\rangle \to \mathbb{C}.$$

(4) $\displaystyle\left|\int_{\varphi} f\right| \le V(\varphi)\cdot \max_{z\in\langle\varphi\rangle} |f(z)|$ *pro každou spojitou $f : \langle\varphi\rangle \to \mathbb{C}$.*

Větička 2. *Nechť f je komplexní funkce komplexní proměnné spojitá na okolí bodu $a \in \mathbb{C}$. Pak*
$$f(a) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_{[a,a+h]} f.$$

Definice. Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je otevřená a $f : G \to \mathbb{C}$ je funkce. Funkci $F : G \to \mathbb{C}$ nazýváme **primitivní funkcí k f na** G, pokud $F'(z) = f(z)$ pro každé $z \in G$.

Větička 3. *Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je otevřená, $f : G \to \mathbb{C}$ je spojitá funkce a F je primitivní funkce k f na G. Pak pro každou cestu $\varphi : [a,b] \to G$ platí $\displaystyle\int_{\varphi} f = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a))$. Speciálně, je-li φ uzavřená cesta v G, pak $\displaystyle\int_{\varphi} f = 0$.*

Věta 4 (charakterizace oblasti). *Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je otevřená. Pak následující podmínky jsou ekvivalentní.*

(a) *Ω je* **souvislá** *(tj. pro každou neprázdnou $G \subset \Omega$ takovou, že G i $\Omega\setminus G$ jsou otevřené množiny, platí $G = \Omega$).*

(b) *Ω je* **křivkově souvislá** *(tj. pro každé dva body $z, w \in \Omega$ existuje spojité zobrazení $\varphi : [0,1] \to \Omega$, pro které $\varphi(0) = z$ a $\varphi(1) = w$).*

(c) *Každé dva body v Ω lze spojit lomenou čárou v Ω (tj. pro každé dva body $z, w \in \Omega$ existuje konečná posloupnost bodů $z = u_0, u_1, \dots, u_n = w$ taková, že pro každé $j = 1, \dots, n$ úsečka spojující u_{j-1} a u_j leží celá v Ω).*

Poznámka: Analogie Věty 4 platí i pro $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

Definice. Otevřenou souvislou podmnožinu $\mathbb{C}$ nazýváme **oblast**.

Věta 5 (primitivní funkce a křivkový integrál). *Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je oblast a $f : \Omega \to \mathbb{C}$ je spojitá funkce. Pak následující podmínky jsou ekvivalentní.*

(i) *f má v Ω primitivní funkci.*

(ii) *Křivkový integrál v Ω* **nezávisí na cestě**, *tj. kdykoli $\varphi : [a,b] \to \Omega$ a $\psi : [c,d] \to \Omega$ jsou dvě cesty splňující $\varphi(a) = \psi(c)$ a $\varphi(b) = \psi(d)$, pak $\displaystyle\int_{\varphi} f = \int_{\psi} f$.*

(iii) *Pro každou uzavřenou cestu $\varphi : [a,b] \to \Omega$ je $\displaystyle\int_{\varphi} f = 0$.*

Poznámka: Věta 5 je variantou hlavní věty teorie pole.