III.3 Spojité větve logaritmu, index bodu ke křivce

Věta 8. *Nechť $\varphi : [a,b] \to \mathbb{C}$ je křivka a $f : \langle\varphi\rangle \to \mathbb{C}$ je spojitá funkce, která na $\langle\varphi\rangle$ nenabývá hodnoty 0. Pak existuje spojitá funkce $L : [a,b] \to \mathbb{C}$ taková, že $f(\varphi(t)) = e^{L(t)}$ pro $t \in [a,b]$. Jsou-li L_1 a L_2 dvě takové funkce, pak existuje $k \in \mathbb{Z}$, že $L_1(t) - L_2(t) = 2k\pi i$ pro $t \in [a,b]$.*

Je-li navíc φ cesta, f je holomorfní na $\langle\varphi\rangle$ a f' spojitá na $\langle\varphi\rangle$, lze volit

$$L(t) = \log(f(\varphi(a))) + \int_a^t \frac{f'(\varphi(s))}{f(\varphi(s))}\varphi'(s)\,\mathrm{d}s.$$

Definice. Nechť φ, f a L jsou jako ve Větě 8. Pak **přírůstkem logaritmu funkce f podél křivky** φ rozumíme číslo

$$\Delta_\varphi \log(f) = L(b) - L(a).$$

Větička 9. *Je-li φ cesta, f holomorfní na $\langle\varphi\rangle$ a f' spojitá na $\langle\varphi\rangle$, pak*

$$\Delta_\varphi \log(f) = \int_\varphi \frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z.$$

Poznámka. Později dokážeme, že je-li f holomorfní, je f' automaticky spojitá.

Definice. Nechť φ je uzavřená cesta a $a \in \mathbb{C} \setminus \langle\varphi\rangle$. Pak **index bodu a vzhledem ke křivce** φ je definován vzorcem

$$\operatorname{ind}_\varphi a = \frac{1}{2\pi i}\int_\varphi \frac{1}{z-a}\,\mathrm{d}z.$$

Poznámka. Je-li φ uzavřená cesta a $a \in \mathbb{C} \setminus \langle\varphi\rangle$, pak $\operatorname{ind}_\varphi a = \frac{1}{2\pi i}\Delta_\varphi \log(z-a)$.

Definice. Nechť $M \subset \mathbb{C}$ je množina. Množinu $A \subset M$ nazveme **komponentou množiny** M, je-li maximální souvislou podmnožinou M (tj. je-li A souvislá a přitom každá množina B splňující $A \subsetneqq B \subset M$ je nesouvislá).

Větička 10. *Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je otevřená. Pak každá její komponenta je otevřená množina.*

Věta 11 (vlastnosti funkce $\operatorname{ind}_\varphi a$). *Nechť φ je uzavřená cesta. Pro $a \in \mathbb{C} \setminus \langle\varphi\rangle$ položme $\iota(a) = \operatorname{ind}_\varphi a$.*

(1) *Funkce ι nabývá jen celočíselných hodnot.*
(2) *Funkce ι je konstantní na každé komponentě množiny $\mathbb{C} \setminus \langle\varphi\rangle$.*
(3) *Funkce ι je rovna nule na neomezené komponentě množiny $\mathbb{C} \setminus \langle\varphi\rangle$.*

Poznámky. (1) Je-li φ kladně orientovaná kružnice o středu a a poloměru r, pak

$$\operatorname{ind}_\varphi z = \begin{cases} 1 & \text{pro } z \in U(a,r), \\ 0, & \text{je-li } |z-a| > r. \end{cases}$$

(2) Platí **Jordanova věta**: Je-li $\varphi : [a,b] \to \mathbb{C}$ uzavřená cesta taková, že φ je prostá na $[a,b)$, pak množina $\mathbb{C} \setminus \langle\varphi\rangle$ má právě dvě komponenty – jednu neomezenou (na ní je index roven nule) a jednu omezenou (na ní je index roven buď 1 nebo -1).

(3) Platí následující **propichovací věta**: Nechť φ je uzavřená cesta, $a, b \in \mathbb{C}$ taková, že $b-a > 0$, úsečka spojující body a, b protíná $\langle\varphi\rangle$ v jediném bodě z_0, ten je různý od a, b, existuje jediné t_0, pro které $\varphi(t_0) = z_0$, a $\operatorname{Im}\varphi'(t_0) \neq 0$. Pak

$$\operatorname{ind}_\varphi a - \operatorname{ind}_\varphi b = \operatorname{sgn} \operatorname{Im}\varphi'(t_0).$$

(4) Index bodu vzhledem ke křivce se v angličtině někdy nazývá **winding number**. To vyjadřuje skutečnost, že je roven „počtu oběhů křivky kolem bodu v kladném smyslu“, což je v souladu s výše uvedeným vztahem k přírůstku logaritmu.

(5) Index bodu vzhledem ke křivce je speciálním případem topologického stupně: Nechť $\varphi : [0,1] \to \mathbb{C}$ je uzavřená cesta. Nechť $f : \overline{U(0,1)} \to \mathbb{C}$ je spojité zobrazení takové, že pro každé $t \in [0,1]$ platí $\varphi(t) = f(e^{2\pi i t})$. (Tento vzorec definuje zobrazení f na jednotkové kružnici, pak se libovolně spojitě rozšíří na celý kruh.) Pro každé $z \in \mathbb{C} \setminus \langle\varphi\rangle$ je pak $\operatorname{ind}_\varphi z$ roven topologickému stupni příslušnému trojici $(f, U(0,1), z)$.