Věta III.16 f holomorfní na $U(a,r) \Rightarrow f$ je na $U(a,r)$ součtem mocninné řady

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n.$$

Koeficienty jsou určeny jednoznačně, $c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$

Dk: [1] jednoznačnost: Nechť $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$, $z \in U(a,r)$

Dle V II.2 (ii) platí

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1) \cdot c_n (z-a)^{n-k}, \quad z \in U(a,r)$$

Dosazením $z=a$ dostaneme $f^{(k)}(a) = k! \cdot c_k$

[2] Existence zvolme $\rho \in (0,r)$ libovolné. Nechť φ_ρ je kladně orientovaná kružnice o středu a a poloměru ρ

Dle V 14 je $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi_\rho} \frac{f(w)}{w-z}\, dw$, $z \in U(a,\rho)$

Zvolme pevné $z \in U(a,\rho)$. Pak $\forall w \in S(a,\rho) = \langle \varphi_\rho \rangle$ platí

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{w-a-(z-a)} = \frac{1}{w-a} \cdot \frac{1}{1-\frac{z-a}{w-a}} =$$

$$= \frac{1}{w-a} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-a}{w-a}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(w-a)^{n+1}}$$

$$\left|\frac{z-a}{w-a}\right| = \frac{|z-a|}{\rho} < 1$$

Tedy $f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\varphi_\varrho} \frac{f(w)}{w-z}\,dw = \frac{1}{2\pi i}\int_{\varphi_\varrho} f(w)\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(w-a)^{n+1}}\right)dw$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\varphi_\varrho}\sum_{n=0}^{\infty}\left(f(w)\frac{(z-a)^n}{(w-a)^{n+1}}\right)dw = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\varphi_\varrho} f(w)\frac{(z-a)^n}{(w-a)^{n+1}}\,dw =$$

V7(1), řada konverguje stejnoměrně na $\langle\varphi_\varrho\rangle$ dle Weierstrassova kritéria:

$$\left|f(w)\frac{(z-a)^n}{(w-a)^{n+1}}\right| \le \frac{|z-a|^n}{\varrho^{n+1}}\cdot\max_{w\in\langle\varphi_\varrho\rangle}|f(w)|$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\underbrace{\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\varphi_\varrho}\frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}\,dw\right)}_{c_n}(z-a)^n$$

To je mocninná řada, jejíž součet je f na $U(a,\varrho)$

$\boxed{3}$ Máme, že f je součtem mocninné řady na $U(a,\varrho)$ pro každé $\varrho\in(0,r)$. Všechny tyto mocninné řady mají stejné koeficienty díky $\boxed{1}$. Proto jde o jednu mocninnou řadu, a f je jejím součtem na $U(a,r)$.