III.4 Lokální Cauchyova věta a její důsledky

Definice. Nechť $a, b, c \in \mathbb{C}$. **Trojúhelníkem** $\triangle abc$ rozumíme konvexní obal množiny $\{a, b, c\}$, tj. nejmenší konvexní množinu obsahující body a, b, c. **Obvodem trojúhelníka** $\triangle abc$ rozumíme křivku

$$\partial\triangle abc = [a, b] \dotplus [b, c] \dotplus [c, a].$$

Věta 12 (Cauchy-Goursatova věta pro trojúhelník). *Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je otevřená množina a f je holomorfní funkce na Ω. Pak*

$$\int_{\partial\triangle abc} f = 0 \text{ pro každý trojúhelník } \triangle abc \text{ obsažený v } \Omega.$$

Důsledek. *Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je otevřená množina, $p \in \Omega$, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ je funkce spojitá na Ω a holomorfní na $\Omega \setminus \{p\}$. Pak*

$$\int_{\partial\triangle abc} f = 0 \text{ pro každý trojúhelník } \triangle abc \text{ obsažený v } \Omega.$$

Definice. Množina $M \subset \mathbb{C}$ se nazývá **hvězdovitá**, pokud existuje takové $a \in M$, že pro každé $b \in M$ je úsečka spojující body a, b celá obsažena v M.

Věta 13 (Cauchyova věta pro hvězdovitou množinu). *Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je otevřená hvězdovitá množina, $p \in \Omega$ a $f : \Omega \to \mathbb{C}$ je spojitá funkce, která je holomorfní na $\Omega \setminus \{p\}$. Pak f má na Ω primitivní funkci, a tedy $\int_\varphi f = 0$ pro každou uzavřenou křivku φ v Ω.*

Poznámka (o nalepování). Nechť Ω_1 a Ω_2 jsou otevřené podmnožiny $\mathbb{C}$, pro které $\Omega_1 \cap \Omega_2$ je souvislá množina. Nechť funkce f má primitivní funkci v Ω_1 i v Ω_2. Pak f má primitivní funkci v $\Omega_1 \cup \Omega_2$.

Věta 14 (Cauchyův vzorec pro kruh). *Nechť f je holomorfní na uzavřeném kruhu o středu $a \in \mathbb{C}$ a poloměru $r > 0$ (tj. na $\overline{U(a, r)}$) a φ je kladně orientovaná kružnice o středu a a poloměru r. Pak pro každé $z \in U(a, r)$ platí*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\varphi \frac{f(w)}{w - z} \, \mathrm{d}w.$$

Důsledek (vlastnost průměru pro holomorfní funkce). *Nechť f je holomorfní na $\overline{U(a, r)}$, kde $a \in \mathbb{C}$ a $r > 0$. Pak platí*

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{it}) \, \mathrm{d}t.$$

Věta 15 (Cauchyův vzorec pro vyšší derivace). *Nechť f je holomorfní na $\overline{U(a, r)}$ (kde $a \in \mathbb{C}$ a $r > 0$). Pak f má na $U(a, r)$ derivace všech řádů a pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $z \in U(a, r)$ platí*

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\varphi \frac{f(w)}{(w - z)^{n+1}} \, \mathrm{d}w,$$

kde φ je kladně orientovaná kružnice o středu a a poloměru r.

Poznámka: Věta 12 též plyne z Věty 15 a Gaussovy věty o divergenci. Je-li totiž f holomorfní, z Cauchy-Riemannových podmínek plyne, že divergence funkcí $\tilde{\overline{f}}$ a $\tilde{\overline{if}}$ je nulová. Vzhledem k tomu, že v Gaussově větě se předpokládá, že příslušná funkce je třídy C^1, nelze Větu 12 přímo odvodit z Gaussovy věty.

Důsledek. *Je-li f holomorfní na množině $M \subset \mathbb{C}$, je i f' holomorfní na M.*

Důsledek. *Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je otevřená množina, $p \in \Omega$, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ je funkce spojitá na Ω a holomorfní na $\Omega \setminus \{p\}$. Pak f je holomorfní na Ω.*

Věta 16 (vyjádření mocninnou řadou). *Nechť f je funkce holomorfní na $U(a, r)$, kde $a \in \mathbb{C}$ a $r > 0$. Pak je f na $U(a, r)$ součtem mocninné řady*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n$$

o středu a, která na $U(a, r)$ konverguje. Koeficienty této řady jsou určeny jednoznačně a platí pro ně

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \text{ pro } n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

(symbolem $f^{(0)}$ rozumíme f).

Věta 17 (Cauchyovy odhady). *Nechť* $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ *na* $U(a,R)$*. Pro* $r \in (0,R)$ *označme*

$$M_r = \max\{|f(z)| : |z-a| = r\}.$$

Pak pro $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *platí* $|c_n| \leq \frac{M_r}{r^n}$*.*

Věta 18 (Liouvilleova věta). *Každá omezená celá funkce je konstantní.*

Poznámka. Platí obecněji: Nechť f je celá funkce a $n \in \mathbb{N}$ takové, že $\lim\limits_{z \to \infty} \frac{f(z)}{z^n} = 0$. Pak f je polynom stupně menšího než n.

($\lim\limits_{z \to \infty} g(z) = w$ znamená: Pro každé $\varepsilon > 0$ existuje takové $R > 0$, že pro každé $|z| > R$ platí $|g(z) - w| < \varepsilon$.)

Věta 19 (základní věta algebry). *Každý polynom stupně alespoň 1 s komplexními koeficienty má aspoň jeden kořen v* $\mathbb{C}$*.*

Důsledek (rozklad na kořenové činitele). *Nechť*

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$$

je polynom s komplexními koeficienty, přičemž $n \geq 1$ *a* $a_n \neq 0$*. Pak existují komplexní čísla* $w_1, \ldots, w_n$ *taková, že pro každé* $z \in \mathbb{C}$ *platí*

$$P(z) = a_n (z - w_1)(z - w_2) \cdots (z - w_n).$$

Čísla $w_1, \ldots, w_n$ *jsou určena jednoznačně až na pořadí.*

Věta 20 (o kořenech holomorfní funkce). *Nechť* f *je funkce holomorfní na* $U(a,r)$*, kde* $a \in \mathbb{C}$ *a* $r > 0$*. Předpokládejme, že* $f(a) = 0$ *a* f *není konstantní nulová funkce na* $U(a,r)$*. Pak existuje právě jedno* $p \in \mathbb{N}$ *a funkce* g *holomorfní na* $U(a,r)$ *taková, že* $g(a) \neq 0$ *a*

$$f(z) = (z-a)^p g(z) \text{ pro } z \in U(a,r).$$

Definice. Je-li f, a a p jako ve Větě 20, říkáme, že bod a je p-**násobný kořen funkce** f.

Definice. Nechť $M \subset \mathbb{C}$ je množina a $z_0 \in \mathbb{C}$. Říkáme, že bod z_0 je **hromadným bodem množiny** M, jestliže každé okolí bodu z_0 obsahuje nějaký bod množiny M různý od z_0. Je-li navíc $\Omega \subset \mathbb{C}$ množina obsahující M, říkáme, že M je **izolovaná v** Ω, jestliže nemá v Ω žádný hromadný bod.

Věta 21 (o jednoznačnosti). *Nechť* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *je oblast a* f, g *jsou funkce holomorfní na* Ω*. Jestliže množina*

$$\{z \in \Omega : f(z) = g(z)\}$$

má hromadný bod v Ω *(tj. není izolovaná v* Ω*), pak* $f = g$ *na* Ω*.*

Důsledek. *Jsou-li* f, g *dvě celé funkce, které se shodují na* $\mathbb{R}$*, pak* $f = g$ *na* $\mathbb{C}$*.*

Věta 22 (princip maxima modulu). *Nechť* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *je oblast a* f *je nekonstantní holomorfní funkce na* Ω*. Pak* $|f|$ *nenabývá nikde v* Ω *lokálního maxima.*

Důsledek. *Nechť* Ω *je neprázdná omezená otevřená množina a* f *je funkce spojitá na* $\overline{\Omega}$*, která je holomorfní na* Ω*. Pak* $|f|$ *nabývá svého maxima na* $\overline{\Omega}$ *na hranici. Speciálním případem je* $\Omega = U(a,r)$*.*

Věta 23 (Weierstrassova věta). *Nechť* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *je otevřená, funkce* f_n *jsou holomorfní v* Ω *a konvergují k funkci* f *lokálně stejnoměrně v* Ω*. Pak* f *je holomorfní v* Ω *a pro každé* $p \in \mathbb{N}$ *funkce* $f_n^{(p)}$ *konvergují k* $f^{(p)}$ *lokálně stejnoměrně v* Ω*.*

Věta 24 (Morerova věta). *Nechť* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *je otevřená a* $f : \Omega \to \mathbb{C}$ *je spojitá funkce taková, že*

$$\int_{\partial \triangle abc} f = 0 \text{ pro každý trojúhelník } \triangle abc \text{ obsažený v } \Omega.$$

Pak f *je holomorfní na* Ω*.*

Poznámka. Věta 24 platí i v případě, že místo trojúhelníků uvažujeme obdélníky, jejichž strany jsou rovnoběžné s osami.