III. Izolované singularity, rezidua, reziduová věta

1. Určete násobnost kořenů funkcí:
(a) $z^2 - z^5$, všechny kořeny, (b) $(1 - m_{1/2}(z))^3$, kořen 1, (c) $e^{z^2} - 1$, všechny kořeny,
(d) $1 - \cos z$, všechny kořeny, (e) $e^{\sin z} - e^{\operatorname{tg} z}$, kořen 0.

2. Najděte a klasifikujte izolované singularity funkcí (včetně chování v ∞):
a) $\frac{z^2-1}{z-1}$, b) $\frac{\sin z}{z}$, c) $\frac{\log(1+z)}{z}$, d) $\frac{1}{e^z-1} - \frac{1}{\sin z}$, e) $\frac{z}{e^z+1}$, f) $\operatorname{tg} \pi z$, g) $\frac{1-\cos z}{\sin^2 z}$,
h) $z(e^{1/z} - 1)$, i) $\cos e^{1/z}$, j) $\operatorname{cotg} z - \frac{1}{z}$, k) $\sin \frac{\pi}{z^2}$.

3. Najděte izolované singularity následujících funkcí a spočtěte příslušná rezidua:
a) $\operatorname{cotg} z$, b) $\sin \frac{1}{1-z}$, c) $\frac{1}{\sin \frac{1}{z}}$, d) $\frac{1}{z^3-z^5}$, e) $\frac{z^2}{(z^2+1)^2}$, f) $\frac{z^{2n}}{(1+z)^n}$, $n \in \mathbb{N}$, g) $\frac{z^2+z-1}{z^2(z-1)}$,
h) $\frac{\sin 2z}{(z+1)^3}$, i) $\frac{e^z}{z^2(z^2+9)}$, j) $\operatorname{cotg}^2 z$, k) $\sin \frac{z}{z+1}$.

4. Spočtěte křivkové integrály z příkladů II/5,6 pomocí reziduové věty.

5. Spočtěte integrály:
a) $\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}x}{a+\cos x}$ $(a \in \mathbb{R}, |a| > 1)$, b) $\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}x}{(a+b\cos x)^2}$ $(a > b > 0)$, c) $\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}x}{a+b\sin^2 x}$ $(a, b > 0)$,
d) $\int_0^{\pi} \frac{\cos nx}{1-2a\cos x+a^2}$ $(a \in \mathbb{R}, a \neq \pm 1, n \in \mathbb{N})$, e) $\int_0^{\pi} \operatorname{tg}(x + ia)\,\mathrm{d}x$ $(a \in \mathbb{R}, a \neq 0)$,
f) $\int_0^{2\pi} \operatorname{cotg}(x + a)\,\mathrm{d}x$ $(a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R})$, g) $\int_0^{\pi} \frac{\cos^4 x}{1+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$,

[Návod: Vyjádřete $\sin x$ a $\cos x$ pomocí exponenciály a podle definice křivkového integrálu převeďte na integrál přes kladně orientovanou jednotkovou kružnici. Ten spočtěte dle reziduové věty. Je-li integrační interval kratší, použijte vhodné symetrie integrované funkce.]

Výsledky a návody. **1.** a) 0 násobnosti 2; 1, $-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ a $-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ násobnosti 1; b) 3; c) 0 násobnosti 2, ostatní $\sqrt{k\pi}(\pm 1 \pm i)$ (všechny čtyři kombinace znamének), $k \in \mathbb{N}$, násobnosti 1; d) $2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, všechny násobnosti 2; e) 3. **2.** a) Holomorfní na $\mathbb{C}\setminus\{1\}$, v 1 odstranitelná singularita, v ∞ pól násobnosti 1; b) holomorfní na $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, v 0 odstranitelná singularita, v ∞ podstatná singularita (uvažte chování na reálné a imaginární ose); c) holomorfní na $\mathbb{C} \setminus ((-\infty, -1] \cup \{0\})$, v 0 odstranitelná singularita, jiné izolované singularity nemá; d) holomorfní na $\mathbb{C} \setminus (\{2k\pi i : k \in \mathbb{Z}\} \cup \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$, v bodě 0 odstranitelná singularita, v ostatních uvedených bodech pól násobnosti 1, v ∞ není izolovaná singularita; e) holomorfní na $\mathbb{C} \setminus \{(2k + 1)\pi i : k \in \mathbb{Z}\}$, v uvedených bodech pól násobnosti 1, v ∞ není izolovaná singularita; f) holomorfní na $\mathbb{C} \setminus \{k + \frac{1}{2} : k \in \mathbb{Z}\}$, v uvedených bodech pól násobnosti 1, v ∞ není izolovaná singularita; g) holomorfní na $\mathbb{C} \setminus \{k\pi i : k \in \mathbb{Z}\}$, v uvedených bodech odstranitelná singularita, po dodefinování je v ∞ podstatná singularita; h) holomorfní na $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, v 0 podstatná singularita, v ∞ odstranitelná singularita; i) holomorfní na $\mathbb{C}\setminus\{0\}$, v 0 podstatná singularita, v ∞ odstranitelná singularita; j) holomorfní na $\mathbb{C}\setminus\{k\pi i : k \in \mathbb{Z}\}$, v 0 odstranitelná singularita, v ostatních uvedených bodech pól násobnosti 1, v ∞ není izolovaná singularita; k) holomorfní na $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, v 0 podstatná singularita, v ∞ odstranitelná singularita. **3.** a) $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ – reziduum v každém z bodů je 1; b) 1, reziduum -1; c) $\frac{1}{k\pi}$, $k \in \mathbb{Z}$, rezidua $\frac{(-1)^{k+1}}{k^2\pi^2}$; d) 0, reziduum 1, 1, reziduum $-\frac{1}{2}$, -1, reziduum $-\frac{1}{2}$; e) i, reziduum $-\frac{i}{4}$, $-i$, reziduum $\frac{i}{4}$; f) -1, reziduum $(-1)^{n+1}\binom{2n}{n-1}$; g) 0, reziduum 0, 1, reziduum 1; h) -1, reziduum $2\sin 2$; i) 0, reziduum $\frac{1}{9}$, $3i$, reziduum $\frac{ie^{3i}}{54}$, $-3i$, reziduum $-\frac{ie^{-3i}}{54}$; j) $\frac{1}{k\pi}$, $k \in \mathbb{Z}$, rezidua 0; k) -1, reziduum $-\cos 1$. **4.** Výsledky jsou samozřejmě stejné jako v sadě II. V příkladu 5 je třeba spočítat příslušná rezidua a rozhodnout, které póly jsou uvnitř příslušné kružnice. Podobně v příkladu 6. Kromě příkladů 6(d,f) je postup s využitím reziduové věty jednodušší. **5.** a) $\frac{2\pi \operatorname{sgn} a}{\sqrt{a^2-1}}$, b) $\frac{2\pi a}{(\sqrt{a^2-b^2})^3}$, c) $\frac{\pi}{\sqrt{a(a+b)}}$, d) $\frac{\pi}{|a^2-1|} \cdot (\min\{|a|, \frac{1}{|a|}\})^n$, e) $\pi i \operatorname{sgn} a$, f) $-2\pi i \operatorname{sgn} \operatorname{Im} a$, g) $2\pi(\sqrt{2} - \frac{5}{4})$.